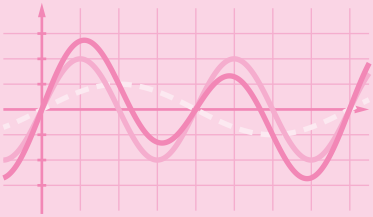
超高效學習！精準掌握搶分關鍵

高中數學總整理



永野裕之／著　陳識中／譯

前言

數學的學習通常依循下面這3個步驟：

(1) **學習新概念**
(2) **理解定理或公式的意義**
(3) **解題**

但日本的高中太過重視定期考試和大學入學考，在學習上經常過於偏重(3)的部分。學生也因此弄錯原本的目的，自始至終都在「背下解題方法來解題」。

如此一來，對於解不開問題的學生，數學就變成了一種苦行；而對於解得開問題的學生，數學將變成一種只關心能不能解開問題的問答遊戲。無論是上述的哪一種，**高中生都很難感受到學習數學的意義和目的**。

另一方面，大學數學則更著重上面的(1)和(2)。這是因為**大學將數學視為一種學問**。既然是學問，那麼自不用說，最重要的就是掌握學習的意義和目的，了解「新概念是什麼」、「通過這個新概念可以得知什麼」。

➢ 俯瞰高中數學的「全貌」，感受大學數學的「入口」

本書既以《高中數學總整理》為題，最重要的主題自然是回答「**什麼是高中數學？**」這個問題。

換句話說，我們要重新從學問的角度來認識高中數學。正因為如此，本書將花費大量篇幅在介紹應該得學習的概念，以及定理與公式的推導。讀者幾乎不需要任何預備知識。**各單元的內容都會從基本的部分開始講解**，因此不需要擔心。

我有自信，讀者只要像堆積木一樣按部就班地閱讀，一定能夠豁然開朗，領悟「原來當時教的那個數學定理是這個意思啊！」。

此外，各節準備的練習題，大家也不必真的去算（當然，如果對自己的實力有自信，請務必挑戰看看）。只要透過每一題附帶的解說和解答，了解到即便沒有「解題技巧」，**只要理解概念、定理和公式的本質，也照樣能解開這些問題**就足夠了。

在這層意義上，即使是「不知道怎麼學數學」、「不論背了多少解法也還是不會算」的現役高中生，相信也一定能從本書中獲益。

除此之外，本書幾乎每個單元都設有專欄，為讀者介紹高中學到的數學知識在歷史上是如何誕生的，又對社會有什麼用處，以及高中數學和大學數學之間的關聯。相信從不同於教科書的角度認識高中數學，能幫助大家對它產生「更立體的理解」。

事實上，本書乃是同系列的**《微積分總整理》**的「小弟」。前作全部的篇幅都專注在高中數學的最頂點「微分與積分」，盡可能鉅細靡遺地介紹它們。而本作的精神依然不變。

不過，由於有關微分和積分的內容會跟前作有所重疊，因此做為一本「『超』概論」性質的著作，本書將只會介紹微積分的概念部分。若對微積分詳細的定理和公式推導有興趣，請務必讀讀看前作。

➢ 本書的結構與「數學地圖」

日本高中生經常「迷失在數學中」的另一個理由，大概是因為看不出各單元的內容之間有何關聯吧。由於學校的課程都是按照既定的課綱，一個單元緊接著一個單元地教下去，因此很少高中生有時間去消化剛學過的單元屬於哪個領域，又跟以前學的單元有什麼關聯。

所以，本書重新將高中數學的內容劃分為以下7個大章：

- **第1章：幾何學**
- **第2章：代數學**
- **第3章：解析幾何學**
- **第4章：數論與數列**
- **第5章：分析學**
- **第6章：機率與統計**
- **第7章：銜接大學數學的數學**

同時也請參考下下頁附贈的「數學地圖」，綜覽各個領域分別位於哪個位置。這張圖涵蓋了日本的中學、高中、大學（一、二年級範圍）的數學內容，並聚焦在高中數學的部分，整理出了高中數學跟前後2個階段之間的關係。

日本高中數學中占比最大的幾何學（第1章）、代數學（第2章）、分析學（第5章），合稱為「**數學的3大領域**」。不過近年為了回應社會需求，機率與統計（第6章）相關的單元比例相較於以前有所增加。屬於中學數學的「圖形」、「數與數式」、「函數」、「資料的運用」這4個領域則是上述這幾個領域的地基。

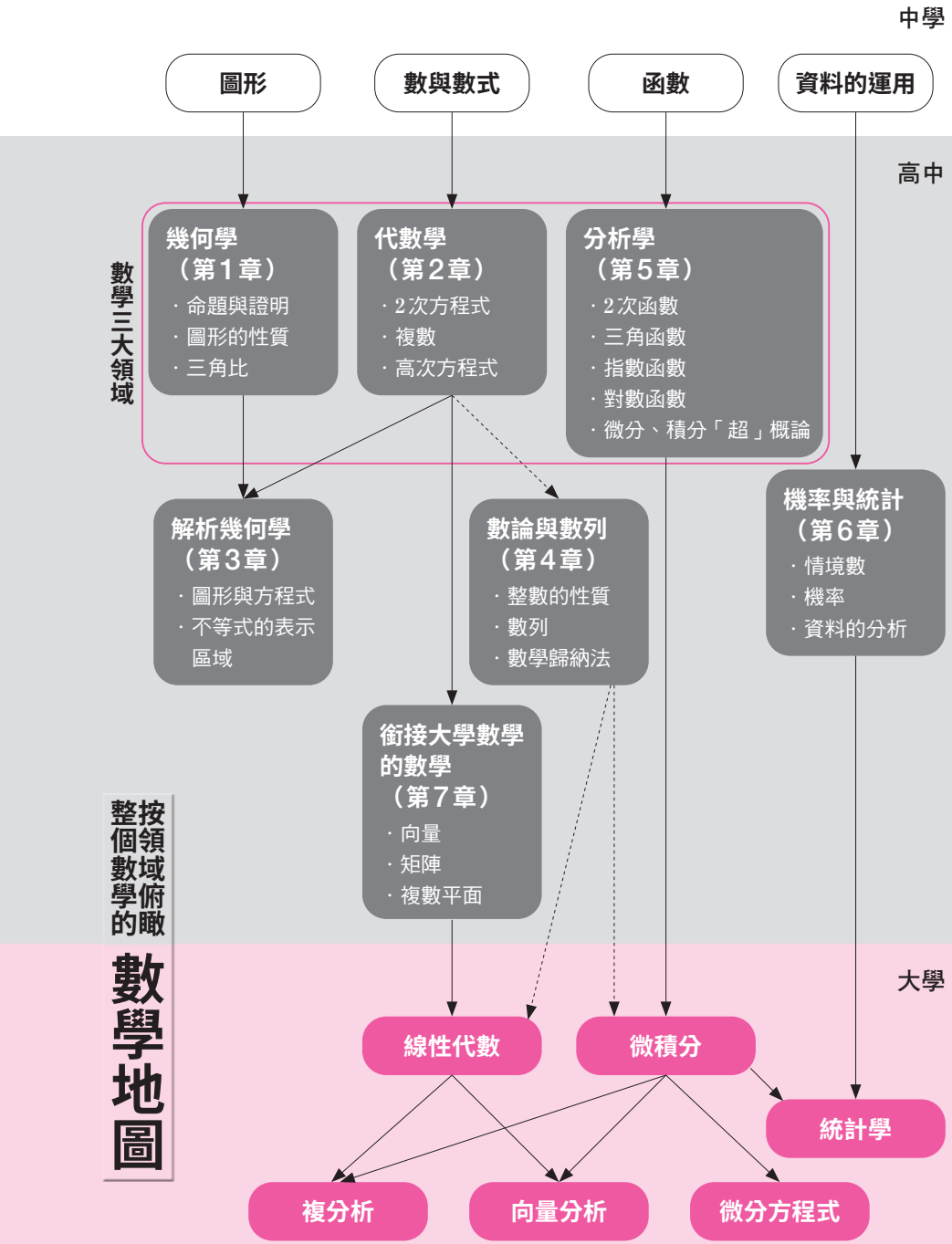
幾何學和代數學，在笛卡兒引入了變數和座標的概念後，結合成了解析幾何學（第3章）。至於處理「1, 2, 3, …」等自然數的數論和數列（第4

章），跟其他領域的關係比較薄弱，可說是**需要獨特想像力的特殊單元**，不過數列的知識在在學習極限和 $n \times n$ 矩陣的成分時也會用到，因此不可不學。

進入大學後，第一年度通常會學「微積分」和「**線性代數**」。而處理1次方程式的線性代數會**用到向量和矩陣**，因此我將這2個單元放到了「銜接大學數學的數學」（第7章）的部分。還有，雖然「矩陣」已不在日本現行的指導要領（相當於台灣的課程綱要）內，但直到不久前都還是高中數學的單元，所以本書還是刻意放了進來。至於在現行指導要領中「復活」的「複數平面」也放入了第7章中。

對於準備再次航向高中數學這片大海的你，接下來的航路恐怕將十分漫長。但別擔心，我將成為導航者一路引領你，直到看清這片大海的全貌。等到讀完這本書時，相信高中數學對你將不再神祕。與此同時，若本書能成為你投入數學這門「學問」的契機，那更將是我身為筆者最大的榮幸。

永野裕之



高中數學總整理

目 次

前言 ····· i

➢ 俯瞰高中數學的「全貌」，感受大學數學的「入口」 i

➢ 本書的結構與「數學地圖」 iii

第1章 幾何學 ～作為說服術發展而來的數學～

專欄 1 「數學」一詞的語源 ····· 2

數學從古至今都是代表性的「必學學問」 3

01 命題與證明 ····· 4

邏輯思考的基礎～必要條件與充分條件～ 5

問題 1 [名古屋學藝大學] 6

問題 2 [同志社大學] 9

「逆否命題」可以揭露真偽 11

問題 3 [東北福祉大學] 12

證明「不」或「無」的「反證法」 14

問題 4 16

避免混淆「逆否命題」和「反證法」 17

專欄 2 學習幾何學的真正原因～帕斯卡的說服術～ ····· 20

說服他人的2種方法 21

02 圖形的性質 ····· 22

中學數學的複習①～平行四邊形～ 22

中學數學的複習②～中點連線定理～ 23

三角形的「五心」其(1)～重心～ 26

三角形的「五心」其(2)～外心～ 28

三角形的「五心」其(3)～垂心～ 32

中學數學的複習③～圓周角定理～ 35

學會更方便的「托勒密定理」 39

03 三角比 ····· 42

三角比的定義與相互關係 42

問題 5 [甲南大學] 45

「正弦定理」及其證明 48

「餘弦定理」及其證明 51

正弦定理是角度的定理，餘弦定理是邊的定理 52

問題 6 53

推導「海龍公式」 55

第2章 代數學 ～用來解方程式的數學～

專欄 3 古代的「方程式」～代數學的本質是普遍化～ ····· 60

從日常生活發現真理的古埃及人 62

01 2次方程式 ····· 63

啊啊，令人懷念的「2次方程式公式解」 64

首先從簡單的2次方程式開始 65

問題 7 66

名曰「配方法的基底式」 67

從配方法導出公式解 68

乘法公式和因式分解的公式 71

用因式分解解2次方程式的方法 74

問題 8 75

02 複數 ····· 78

人類第一次接觸虛數的瞬間 78

虛數單位 i ～「愛」也可以視「情況」代換～ 80

i 帶來「世上最美麗的數式」 82

「虛實」共處的「複數」～定義與相等～ 83

問題 9 [昭和女子大學] 84

03 高次方程式 86
解法(1)～利用因式分解的公式～ 86
問題10 88
解法(2)～利用代換～ 91
解法(3)～利用因式定理～ 95
問題11 101
專欄4 公式解劇場～介紹３次方程式的公式解～ 105
好好先生豐坦納與狡猾的卡丹諾 105

第3章 解析幾何學 ～數與圖形的統一～

專欄5 笛卡兒的革命～幾何學與代數學的融合～ 110
引入變數和座標的概念 112
01 圖形與方程式 114
用畢氏定理求「２點間的距離」 114
直線方程式(1)～已知通過１點且已知斜率的情況～ 116
直線方程式(2)～已知通過２點的情況～ 118
從斜率思考「２直線的關係」 120
問題12 122
可將２點間的距離視為半徑來求「圓的方程式」 125
問題13［立命館大學］ 126
02 不等式的表示區域 130
１次不等式所表示的區域～邊界為直線～ 130
以圓為邊界的區域～區分內外的不等號方向～ 133
「線性規劃」～商用數學的實例～ 136
問題14［九州大學］ 136
使用區域來判斷必要條件與充分條件 141
問題15［神戶藥科大學］ 141
「或」與「且」 143
專欄6 歐拉想出來的絕對正確推論法～邏輯與區域～ 144
問題16［國家Ⅰ種錄取考試］ 146

第4章 數論與數列 ～1, 2, 3…是最難的!?～

專欄7 美麗高貴的「數學女王」 150
01 整數的性質 152
「質數」～困擾人類千年的「重要的數」～ 152
質因數分解～「１」不是質數的原因～ 153
問題17［慶應義塾大學］ 155
因數與公因數 157
倍數與公倍數 158
問題18［近畿大學］ 160
「輾轉相除法」～人類史上最古老的演算法～ 162
用輾轉相除法解１次不定方程式 168
問題19［大阪市立大學］ 168
補充 「除法與最大公因數定理」的證明 171
專欄8 親和數與完全數與梅森質數 174
02 數列 178
數列～以平方數和偶數為例～ 178
等差數列與等比數列～推導兩者的一般項～ 179
問題20［立命館大學］ 181
等差數列的和～用「圖形」導出公式～ 184
等比數列的和～用「計算」導出公式～ 186
每個人都應該會用的Σ（sigma）符號 188
Σ的計算公式及其證明 190
簡直就像分配律～超級方便的Σ的性質～ 192
問題21［中央大學］ 194
階差數列也能用Σ輕鬆解決 196
03 數學歸納法 200
用骨牌來思考「無限」 201
問題22［東京大學］ 205
專欄9 關於「數學歸納法」的命名由來 210

歸納與演繹～物理與數學～ 210
如果硬要解釋這個彆扭的命名 211

第5章 分析學 ～函數與微積分～

專欄 10 函數與自動販賣機 214

01 2次函數 217

中學數學教的「3種」函數 217
函數與方程式～雖然圖形長得一樣，但意義不同～ 222
思考簡單的2次函數「$y=ax^2$」的平行移動 224
思考一般2次函數「$y=ax^2+bx+c$」的圖形 227
問題 23［愛媛大學］ 229

02 三角函數 234

大幅提升三角比便利性的3個新概念 235
弧度法（radian）～用角度來表示長度比～ 236
三角函數的定義與相互關係 240
「廣義角」的引進～將適用範圍擴展到所有實數～ 242
知名的直角三角形與「特殊」角度 244
三角函數的「特殊」值 246
從原理思考並導出「負角、餘角公式」 251
這裡是關鍵！最難的「加法定理」 252
從加法定理導出「二倍角公式」和「半角公式」 258
三角函數的合成 261
問題 24［京都大學］ 263

專欄 11 三角函數有什麼用？～傅立葉展開的恩惠～ 267

受拿破崙喜愛的才子——約瑟夫・傅立葉 269
$y=A\sin k\theta$的圖形 270
什麼是傅立葉展開 272
傅立葉變換的應用例 275

03 指數函數 276

指數範圍的擴張①～0和負整數的指數～ 278
方根的定義與性質 281
指數範圍的擴張②～有理數的指數～ 286
問題 25［鳥取大學］ 288
指數範圍的擴張③～無理數的指數～ 289
指數函數的定義與「慣例」 291
指數函數的圖形及其特徵 292
問題 26［東京藥科大學］ 297

04 對數函數 300

對數的定義與性質 301
對數定律與及證明 303
換底公式 305
問題 27［神奈川大學］［昭和藥科大學］ 306
對數函數及其圖形的特徵 308
關於反函數 313
問題 28［名古屋市立大學］ 314

專欄 12 對數主宰我們的感覺!? ～韋伯-費希納定理～ 318

到底多「微小的變化」能被人類識別？ 318
從韋伯定理發展而來的費希納定理 319
對數被用於尺度的例子 321

05 微分、積分「超」概論 326

微分是什麼 326
平均變化率的極限：微分係數 329
導函數與增減表～微分的本質是？～ 332
積分～遠比微分更「大哥」～ 334
為什麼牛頓和萊布尼茲是「微積分之父」 339
什麼是逆運算 340
微積分的基本定理 341
公式的整理 348

專欄 13 納皮爾數（自然底數）e 349

第6章 機率與統計 ～用於處理偶然的數學～

01 情境數 ……356

計算數量的4種情境 356
[情境1] 考慮順序，不允許重複：排列 358
[情境2] 不考慮順序，不允許重複：組合 359
[情境3] 考慮順序，允許重複：重複排列 363
[情境4] 不考慮順序，允許重複：重複組合 364
問題29 [東京醫科齒科大學] 368

02 機率 ……370

集合及其表示方式 370
機率～表示確定性的數學指標～ 371
問題30 375
和事件與積事件～「杯子」與「帽子」～ 377
餘事件～以全體為「1」來思考其餘～ 380
獨立試驗～丟骰子和硬幣～ 382
重複試驗～丟骰子和硬幣n次～ 384
條件機率～比如太郎和次郎都～ 387
原因的機率（貝氏定理） 389
問題31 [岐阜藥科大學] 391

專欄14 違反直覺的機率 ……394
(1) 樂透彩第一天買跟最後一天買都一樣 394
(2) 生日的悖論 395
(3) 即使實力差不多也可能很快分出勝負？ 398

03 資料的分析 ……402

代表值～「中位數」與「眾數」～ 403
資料的分布與代表值 406
顯示分散程度的指標1～變異數～ 408
顯示分散程度的指標2～標準差～ 411
問題32 [筑波大學] 414
能一眼看出2變數關係的「散布圖」 416
將相關程度數值化的「相關係數」的算法 419
用「－1～＋1」的數直線解釋相關係數 423
相關係數的理論背景（範圍外） 423

專欄15 相關關係的注意點 ……431
不要輕易拉關係 432

第7章 銜接大學數學的數學 ～線性代數與複數平面～

專欄16 向量的用途～向量的2種面貌～ ……436
用數學方法處理「箭頭」的好處是？ 436
物理學中的向量 438
作為多維量的向量 442

01 向量 ……444

向量的相等～方向和長度皆完全相同～ 444
逆向量與零向量 445
向量的加法～「和」的定義，2種理解方式～ 446
向量的減法～「差」的定義，2種理解方式～ 448
向量的實數倍與平行條件 451
最重要的重點：向量的分解 453
問題33 [早稻田大學] 455
向量的分量～起始點在原點上時的座標～ 458
透過分量計算向量 459
用向量的分量表示向量大小（長度） 462
向量的內積及其圖形上的意義 464
向量的垂直條件～以內積為0（沒有影子）來想像～ 468
n維向量的大小、內積與夾角的定義（範圍外） 469
內積的性質及其證明 471
問題34 [東京理科大學] 473
向量的外積（雖然在範圍外，但還是簡單介紹） 476

專欄17 向量的「分量」與基底的代換 ……482
基底的替換與斜角座標系 486

02 矩陣 …… 488

矩陣的導入～從矩陣的表示方法開始～ 488
矩陣與向量的積 491
矩陣的計算①～和與實數倍～ 493
矩陣的計算②～矩陣的積及其不可交換性～ 495
矩陣的積的定義如此複雜的原因 498
特殊矩陣～零矩陣 O 與單位矩陣 E ～ 500
逆矩陣的定義及其性質 502
掌握關鍵的「行列式」$ad - bc$ 506
問題 35 [大分大學] 510
補充 特徵向量與特徵值 514
1 次變換（線性變換） 516
關於線性關係 520
變換的和與矩陣的和 522
合成變換與矩陣的積 524

專欄 18 矩陣的用途～馬可夫鏈與市占率分析～ …… 526

03 複數平面 …… 532

複數平面～虛實交雜的座標平面～ 533
共軛複數 534
複數的絕對值 539
複數的極座標 540
極座標的乘法 544
極座標的除法 545
表示旋轉的複數 547
問題 36 [大阪大學] 548
棣美弗定理 552
1 的 n 次方根 555

專欄 19 推導歐拉公式 …… 557

後記 …… 566

索引 …… 569

High school mathematics

第 1 章

幾何學

～作為說服術發展而來的數學～

Geometry

專欄 1

「數學」一詞的語源

據說數學（mathematics）一詞的語源，來自希臘語的**「mathemata」**。Mathemata的原意是「應學之事（複數形）」。換言之，最初的「數學」跟「學科」是相同的意思。

在古希臘，mathemata（數學＝學科）指的是以下4種學問。

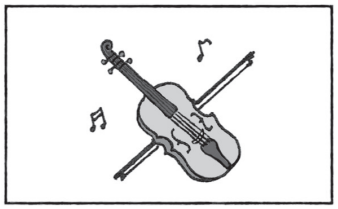
1）算術
2）音樂＝應用數論
3）幾何學
4）天文學＝球面學（運動中的幾何學）

古希臘中的mathemata（數學＝學科）

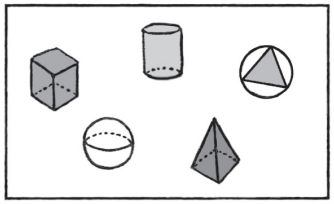
算術



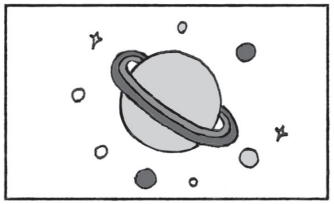
音樂＝應用數論



幾何學



天文學＝球面學



之所以說音樂是「應用數論」，是因為古希臘人發現只要按住琴弦的「部分：全長＝1：2」的位置，就能使弦音增加1個八度；而按住「部分：全長＝2：3」的位置，就能彈出5度（「Do」和「So」的音程）的美麗和音。

事實上，最先發現八度音程和「Do」與「So」等音程關係之法則的人，正是古希臘數學家**畢達哥拉斯**（西元前580前後－前500前後）及其學派。在人類自然感受到美麗的音程背後，竟然是極為簡單的整數比，相信古希臘人當時應該相當震撼吧。或許他們從中感受到了「神」的存在。

實際上，畢達哥拉斯學派對音階的研究，正是他們發展出「萬物皆數」這個略顯極端的思想（教義）的原因。

數學從古至今都是代表性的「必學學問」

在古希臘，數學會成為「應學之事」的代名詞，可以說跟古希臘的民主制度不無關係。在透過辯論來決定重要事項的社會制度中，**如何說服跟自己不同觀點的對手接受自己的想法，或者讓對方理解自己想法的能力——也就是邏輯力**，乃是一項必備的技能。而古希臘人認為，要磨練邏輯力，就必須學習數學。

當然，這一點在現代也沒有任何不同。

出了社會後，多數人這輩子大概就沒什麼機會再用到2次方程式，或是向量的內積。然而，不只是在日本，在全世界的先進國家中，數學都是所有理工科系的必學科目，正是因為**數學是訓練邏輯能力的最佳教材**。

01 命題與證明

若有人問我**高中數學最重要的單元是什麼**，那我一定會毫不猶豫地回答是本節的主題「命題與證明」。

尤其是**「必要條件」**和**「充分條件」**，理解這2個概念，可以說是打好整個邏輯學基礎的**最重要事項**。

關於這一點，我在求學時最敬愛的數學家**長岡亮介先生**曾在其著作中如此說過：

> 「當我聽說有些高中生或高中老師以為『必要』和『充分』只是數學中的1個小單元時，我打從心底感到震驚。因為所有人都知道數學跟邏輯密不可分，而『必要』和『充分』更是數學邏輯中最重要的基本概念，甚至可以說『少了這2個概念，所有數學都無從展開』。」
>
> （摘自 旺文社《數學I＋A＋II＋B極選50 實踐篇》）

同時，理解運用「相反的視角」進行證明的**逆否命題**和**反證法**也非常重要。逆否命題可以簡化乍看複雜的命題，反證法則是在面對正攻法無法（難以）證明的命題時非常有效的證明工具。

在開始詳細的解說前，我們先確認一下到底**什麼是「命題」**。

命題：可以客觀判斷真偽的陳述句

比如「富士山是日本第一高山」是一個命題，但「富士山真好看」就不是命題。因為富士山的標高是不是日本第一可以客觀判斷，但富士山好不好看是個人感覺（即便大多數人都認為「好看」也一樣），無法客觀判斷真偽。

➢ 邏輯思考的基礎～必要條件與充分條件～

首先從教科書上的定義開始。

【必要條件與充分條件的定義】

當命題「若P則Q」為真時

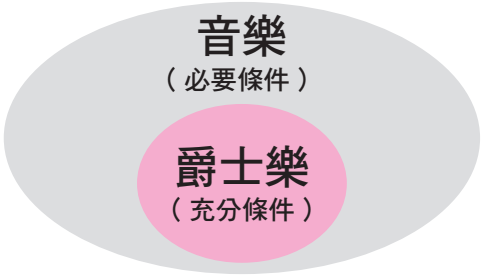
P為（Q的）充分條件
Q為（P的）必要條件

現在，假設P是「爵士樂」，Q是「音樂」，那麼「若P則Q」的意思便是「如果是爵士樂，則屬於音樂」。而因為這個陳述是真的（正確），所以根據定義，

爵士樂：充分條件
音　樂：必要條件

確實，如果某個東西要是爵士樂，那它必須（至少）先是音樂才行。同時，我們也可以說若某個東西是爵士樂，那它就充分滿足了被稱為音樂的條件（甚至還有得找）。

因為爵士樂是音樂底下的一個領域，所以將兩者的關係畫成圖的話，就會像下一頁的樣子。



由此可見，當2個集合的**其中一者完全包住另一者**時，就代表兩者存在以下的關係（關於集合的部分會在第6章詳述）。理解這個關係十分重要。

區域較小的一方（爵士樂）：充分條件
區域較大的一方（音　樂）：必要條件

而當2個命題「若P則Q」和「若Q則P」皆為真時，我們會說「P和Q互為**充分必要條件**」，或是「P和Q**等價**」。

那下面來練習幾個問題吧。

問題 1

假設x為實數。已知$-1<x\leqq 2$是$a<x<a+4$的充分條件，求a值的範圍。

［名古屋學藝大學］

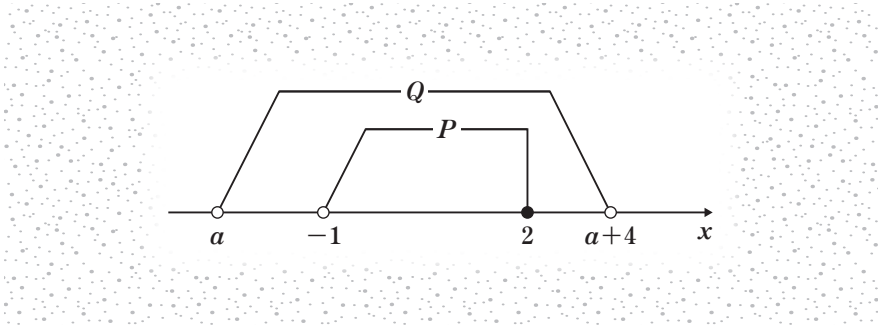
解說 解答

這題的意思是，當

$$P：-1<x\leqq 2$$
$$Q：a<x<a+4$$

時，「求可使P為Q之充分條件的a的範圍」。換言之，只要計算可使**P包含在Q內（P比Q小）的a的範圍**即可。

這裡我們用數線來想。只有當P和Q的關係如下圖時，才能滿足題意（題目的意思）。



先看數線的左端，即便$a=-1$時，P也不會超出Q的範圍；但在右端，當$2=a+4$時，P就會超出Q的範圍。

由上可知，我們要求的條件是

$$a\leqq -1 \quad 且 \quad 2<a+4$$

解此聯立不等式，便可得到答案

$$-2<a\leqq -1$$

$2-4<a$
$\Rightarrow \quad -2<a$

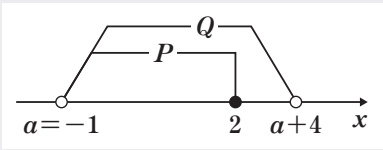
（註）　在數學中用數線表示不等式的範圍時，通常
無等號的不等號（＜）用○和斜線
有等號的不等號（≦）用●和垂直（於數線的）線
來表示。

比如「$1 \leqq x < 4$」會畫成下面這樣。



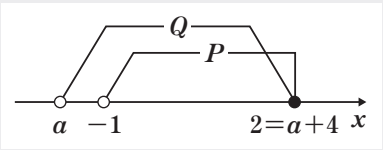
如此一來，就能直觀地在圖上看出「當 $a = -1$ 時 P 也不會超出 Q」和「當 $2 = a + 4$ 時 P 會超出 Q」。

$a = -1$ 時



P 不會超出 Q

$2 = a + 4$ 時



P 會超出 Q

我們平常在生活中進行選擇時，也會自然地

先用必要條件篩選範圍，再檢視選項是否滿足充分條件。

比如中午休息時間出去吃午餐時，相信很多人都會用「200元以內」等預算當必要條件吧。接著再加上「可在30分鐘內吃完」、「口味清爽」等必要條件，篩選出滿足必要條件的選項。然後，再仔細看看剩下來的選項中，哪個可以滿足今天對午餐的喜好（是否充分），最後才決定「好，今天吃炒麵吧」吧。

如果懂得像這樣運用必要條件和充分條件，就可以在解題時發揮巨大的威力。

比如下面這道例題。

問題 2

已知整數 x、y、z 滿足 $0 < x \leqq y \leqq z$

求所有滿足 $xyz = x + y + z$ 的整數 x、y、z。

［同志社大學］

解說 解答

解說

整數問題往往比較難（詳細內容會在第4章的〈數論與數列〉介紹），必須使用特殊的解題途徑，而遇到這類題目時，**從思考極端的例子開始**，然後**「用必要條件縮小範圍，再來檢查是否滿足充分條件」**就是個很有效的解題方法。

題目說「$0 < x \leqq y \leqq z$」，所以 x 和 y 都是不大於 z 的數。因此，我們可以先試想最「極端的例子」，也就是 $x = z$ 且 $y = z$ 的情況。

解答

由 $0 < x \leqq y \leqq z$ 可知

$$xyz = x + y + z \leqq z + z + z = 3z$$

$$\Rightarrow \quad xyz \leqq 3z$$ ←必要條件

因 $z \neq 0$

$$xy \leqq 3 \quad \cdots ①$$

因為x、y是正整數，所以要滿足①式，(x, y)只能是

$$(x, y) = (1, 1)、(1, 2)、(1, 3)$$ ←必要條件

於是我們就將候補選項縮小到3個了。接著，再思考這3者是否滿足「$0 < x \leqq y \leqq z$」和「$xyz = x + y + z$」。

(1) 當$(x, y) = (1, 1)$時， ←接著，將檢查是否滿足充分條件

由$xyz = x + y + z$可知

$$z = 2 + z$$

因不存在滿足此條件的z，故此答案不適合。

(2) 當$(x, y) = (1, 2)$時，

由$xyz = x + y + z$可知

$$2z = 3 + z$$
$$\Rightarrow \quad z = 3$$

此答案滿足$0 < x \leqq y \leqq z$，故適合。

(3) 當$(x, y) = (1, 3)$時，

由$xyz = x + y + z$可知

$$3z = 4 + z$$
$$\Rightarrow \quad z = 2$$

此答案不滿足$0 < x \leqq y \leqq z$，故不適合。

由上可知，

$$\boldsymbol{(x, y, z) = (1, 2, 3)}$$

即是本題的解。

（註）　「⇒」是表示「若…則…」的邏輯符號。

➢「逆否命題」可以揭露真偽

在數學上，任意「$P \Rightarrow Q$（若P則Q）」的命題還分別存在「逆命題、否命題、逆否命題」，它們的定義如下。

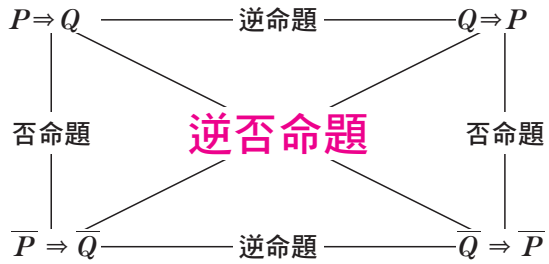
【命題的逆、否、逆否命題】

逆命題　：「⇒」的前後調換

否命題　：「⇒」的前後順序不變，但兩邊都加上「非」（否定型）

逆否命題：「⇒」的前後調換，且兩邊都加上「非」

下面我們用圖來表示上述定義。另外，圖中的「$\overline{P}$」、「$\overline{Q}$」分別代表「非P（P的否定）」和「非Q（Q的否定）」。



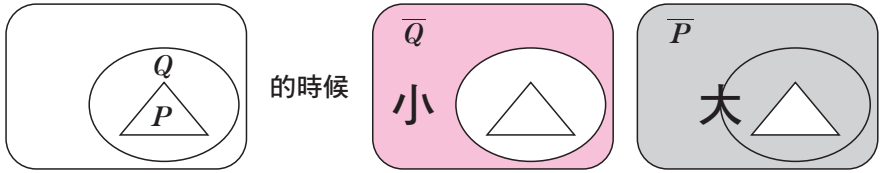
這幾個命題中最重要的是逆否命題。

因為，

原始命題的真偽一定跟逆否命題的真偽相同。

確實，若命題「富士山是日本第一高山」為真，那麼它的逆否命題「若（一座山）不是日本第一高山，則（它）不是富士山」也會是真的。而對於「若（一個人）住在關東，則（他）住在東京」這個錯誤命題（該對象也有可能住在神奈川縣等），其逆否命題「若（一個人）不住在東京，則（他）不住在關東」也同樣會是錯誤的。

原始命題的真偽跟逆否命題的真偽必然一致這件事，可以用下面的圖來說明。



剛剛說過，當命題「$P \Rightarrow Q$」為真時，代表P被包含在Q中（P的範圍比較小，Q的範圍比較大）對吧。此時「$\overline{Q}$」和「$\overline{P}$」會是怎麼樣呢？答案是「$\overline{Q}$」會被包含在「$\overline{P}$」內（$\overline{Q}$ 的範圍比較小，$\overline{P}$ 的範圍大）。所以當「$P \Rightarrow Q$」為真時，「$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$」也為真。

同理，當「$P \Rightarrow Q$」為假時，你會發現「$\overline{Q}$」也不會被包含在「$\overline{P}$」內（$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ 為假）。

那下面我們就用逆否命題的力量來解題吧。

問題 3

請證明命題「對於任意自然數a、b，若a^2+b^2為奇數，則ab為偶數」為真。

［東北福祉大學］

解說 解答

解說

如果要從正面證明這個命題，就必須先把假設「a^2+b^2 為奇數」這件事寫成數式

$$a^2+b^2=2k+1\ (k\text{為整數})$$

然後再把ab寫成「$2\times$整數」的形式。但要從上面的數式導出「$ab=$　」的形式並不容易。因此我們可以**改用逆否命題來思考，透過證明它的逆否命題為真，間接證明原始命題為真**。

解答

證明原始命題的逆否命題「若ab不是偶數（為奇數），則 a^2+b^2 不是奇數（為偶數）」為真。

當ab為奇數時，a和b都一定是奇數，故

$$a=2k+1\ (k\text{為整數})$$
$$b=2l+1\ (l\text{為整數})$$

此時

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=(2k+1)^2+(2l+1)^2 \\ &=4k^2+4k+1+4l^2+4l+1 \\ &=2(2k^2+2k+2l^2+2l+1) \end{aligned}$$

乘法公式 $(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$

因$(2k^2+2k+2l^2+2l+1)$一定是整數，故 a^2+b^2 為偶數。

因此，**由於其逆否命題為真，故原始命題也為真**。

證明結束

當看不懂一個命題（文章），不知道怎麼判斷其真偽時，有時從它的逆否命題來想會簡單得多。

比如，假設有個命題是「若不以擴大銷路為目標，就無法增加獲利」。這個命題乍看之下好像是正確的，但因為前後兩句都是否定句，所以聽起來有點拗口。因此我們試著想想看它的逆否命題。其逆否命題是「若想增加獲利，就要以擴大銷路為目標」。嗯？這句話是正確的嗎？如果「想增加獲利」，方法應該不只「以擴大銷路為目標」這一個吧。比如「提高顧客回頭率」、「降低成本」也是可行的方案。因此，「若不以擴大銷路為目標，就無法增加獲利」這個命題並不正確。

所以在遇到否定句特別多的命題（文章），感覺乍看不易理解時，特別推薦大家使用逆否命題來思考看看。

➢ 證明「不」或「無」的「反證法」

遇到不易證明的命題時，首先請想想看它的逆否命題。但如果逆否命題也不好證明的話，那麼還有一個方法是**反證法**。

所謂反證法，就是先假設要證明的結論是錯誤的，然後以此推導出矛盾的結果，間接證明它不可能是錯的。反證法的證明步驟如下。

【反證法的步驟】

① **否定要證明的結論**

② **導出矛盾的結果**

活躍於20世紀上半葉的代表性日本數學家**岡潔先生**曾說過：

「要證明一個題目有解，只要實際解出答案即可。但要證明一個題目無解，到底該怎麼做才好呢？這件事我愈想愈覺得不可思議。」

的確，就算「以前沒有人辦到（沒解出答案）」，也無法證明「無論如何都辦不到（題目本身無解）」。同樣地，「以前都沒人發現」也不代表「永遠不會有人發現」。反證法最大的用處，就是用來處理這類難以直接證明的情境。一般來說，在證明

（ⅰ）無法

（ⅱ）不存在

（ⅲ）無限

等情況時，經常會使用反證法。

順帶一提，高中數學出現的反證法問題幾乎都是跟無理數有關的問題。這是因為無理數是「無法用分數表示的數」，而反證法很適合用來證明「無法」這件事。

下面我們就試著用反證法來證明「不存在」吧。

問題 4

證明當x、y都是奇數，且n為整數時，不存在滿足x、y的方程式 $x^2+y^2=n^2$ 的 (x, y)。

解說／解答

解說

因為目的是要證明此方程式不存在奇數的解，所以我們的策略是先假設存在一個x和y都是奇數的解，然後導出矛盾的結果。另外在導出矛盾的時候，要注意區分n是偶數和n是奇數時的情況。

解答

假設存在滿足 $x^2+y^2=n^2$ 的奇數x、y：

$$x=2k+1\ (k\text{為整數})$$
$$y=2l+1\ (l\text{為整數})$$

將x、y代入題目給的原方程式

$$(2k+1)^2+(2l+1)^2=n^2$$
$$\Rightarrow\quad 4k^2+4k+1+4l^2+4l+1=n^2$$
$$\Rightarrow\quad n^2=4(k^2+k+l^2+l)+2$$

因 k^2+k+l^2+l 為整數，故可知上式的 n^2 除以4後的餘數為2。…①

另一方面，當n為偶數時：

$$n=2m\quad\Rightarrow\quad n^2=(2m)^2=4m^2\ (m\text{為整數})$$

故 **n^2 除以4的餘數為0**。

又，當n為奇數時：

$$n=2m+1\quad\Rightarrow\quad n^2=(2m+1)^2$$
$$=4m^2+4m+1$$
$$=4(m^2+m)+1\ (m\text{為整數})$$

故 **n^2 除以4的餘數為1**。

由此可知，n^2 除以4的餘數必定為0或1，**跟①的結論「n^2 除以4後的餘數為2」互相矛盾**。

因此，不存在滿足 $x^2+y^2=n^2$ 的奇數x、y。

證明結束

➢ 避免混淆「逆否命題」和「反證法」

不少人會混淆逆否命題和反證法，但**這2個其實是似是而非的東西**。

比如，讓我們用**「不是音樂就不是爵士樂」**這個命題為例來思考。若使用「⇒」改寫此命題：

原始命題：「不是音樂⇒不是爵士樂」

所以在此命題中，

假設：「不是音樂」
結論：「不是爵士樂」

首先使用逆否命題來證明。

【使用逆否命題證明】

逆否命題就是將假設和結果都改為否定型，然後調換「⇒」的前後位置。因此會變成，

逆否命題：是爵士樂⇒是音樂

根據第6頁的圖（爵士樂包含在音樂內），此命題為

「充分條件（小）⇒必要條件（大）」

因此命題為真。而**因為證明了逆否命題為真，因此原始命題「不是音樂⇒不是爵士樂」也為真**。

接著，我們再使用反證法證明同一個命題。

【使用反證法證明】

除了原本的假設外，再假設「結論的否定型」。

不是音樂，但是是爵士樂

↓

跟「爵士樂是音樂的一種」互相矛盾

↓

因此，不是音樂一定不是爵士樂

像這樣互相比較，應該就能看出逆否命題和反證法的不同之處了。

逆否命題跟反證法的差別

P（假設）⇒Q（結論）

的證明方法

【用逆否命題證明】

證明「非Q」⇒「非P」

【用反證法證明】

假設「P」和「非Q」

⬇

導出矛盾



專欄 2

學習幾何學的真正原因
～帕斯卡的說服術～

猜猜學習幾何學的真正目的是什麼？

跟生活中一定會用到的算術相比，數學可能並不算實用。其中跟圖形有關的幾何學在出社會後幾乎派不上什麼用場。函數、方程式、機率與統計的相關知識或技術可能還會用到一點，但幾何學中教的圖形相等、畢氏定理、圓周角定理等，在職場上恐怕根本沒有能應用的場景（除了極少見的情況外）。

然而我們的課綱卻還是沒有刪掉幾何學。這是因為幾何學雖然不實用，卻還是有學習的價值。我認為在所有數學領域中（尤其是對於將來不會用到數學的人），唯有幾何學是必學不可的。

你知道在西方，有一本被人們當成數學教科書超過2000年之久的著作，書名是**《幾何原本》**嗎？《幾何原本》是亞歷山卓的**歐幾里得**（西元前330年前後－前275年前後）所寫，內容整理了古希臘時代在西元前6世紀以後發展而來的論證數學。

《幾何原本》是一套共13卷的龐大著作，其中的內容大多都在描述圖形。這是因為當時別說是函數跟方程式了，就連今天我們常用的數學式都還不存在。

然而，《幾何原本》即便在實用數學誕生後也一直是數學教育的核心。這是為什麼呢？

這是因為，**若要鍛鍊邏輯思考能力，運用幾何學是最原始且直觀的方法。**

實際上，在日本的數學教育中，最先學到的「證明」就出現在中學二年級的「圖形的全等」這個幾何學單元中。

說服他人的2種方法

曾說過「人是會思考的蘆葦」這句名言的法國哲學家**帕斯卡**（1623－1662）曾在〈說服的藝術〉一文中，介紹了2種說服他人的方法。

(1)　用人們喜歡聽的方式說話
(2)　用嚴謹的邏輯辯倒對方

帕斯卡是個非常知名的作家，擁有極高的(1)的才能，但他本人卻謙遜地表示自己不太擅長(1)的方法，因此只深入闡述了(2)的方法（詳細內容請參閱吉田洋一先生和赤攝也先生的名著《數學序說》（暫譯，筑摩學藝文庫））。這裡簡單總結一下其內容。

- **除了自明的詞彙外，明確定義你使用的所有詞語**
- **確認你的論點是否建立在所有人必須承認的公理（前提）之上**
- **只使用定義、公理以及已經過證明的命題（定理）證明所有並非不證自明的命題**

這幾點正是《幾何原本》想傳達的邏輯思考的基礎，而掌握這套方法，正是我們學習幾何學的真正原因。

下一節我們將介紹「圖形的性質」這個相當於幾何學本身的單元，但礙於篇幅的關係，將只介紹經過精挑細選的部分。重要的不是死記文中出現的定理，而是**去品味這些定理是如何被證明的。**