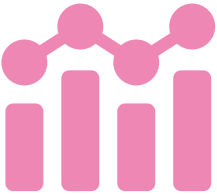
超高效學習！精準掌握搶分關鍵

微積分總整理



永野裕之／著　卓威廷／譯

序言——站上高中數學的頂端吧

知名的霍金博士在著作《時間簡史》（早川書房出版）中提到，出版一般書籍「**每增加一條數學式，書的銷量就會減半**」。

當然我也非常清楚，世界上有許多的人都有著「數學式過敏症」。然而，**本書並沒有因此刻意迴避數學式**，不如說，反而更加積極使用。這又是為什麼呢？

答案是，為了能夠讓閱讀本書的讀者們**充分理解作為高中數學頂端的微積分的意義與價值**。

➢ 為了能夠「運用」微積分

在微積分相關的書籍中，有不少書籍為了顧及「數學式過敏症」的讀者，會盡量不使用數學式來講解概念。這類書籍在內容上花費的心力也時常讓我感到佩服。

然而另一方面，每次看到這樣的書籍，我也會抱持著

「這樣做有將微積分的魅力傳達給讀者嗎？」

的擔憂（真是多管閒事！）。

畢竟，微積分的偉大之處就是要實際使用後才能開始體會，拋開數學式，僅憑圖像來理解概念，還是無法運用微積分吧。

世界聞名的指揮家小澤征爾先生曾經說過，

「將Do、Mi、So和弦的美妙聲響當作知識記在腦袋的人，與實際親自嘗試用鋼琴彈奏出Do、Mi、So和弦後，感嘆『真是美麗啊！』的人，兩者是截然不同的。」

這句話放在微積分也是同樣的道理。

微積分確實在很大程度上存在計算技巧的一面，但那絕不只是些小把戲而已，而是**人類為了抵達真理所獲得的寶貴技術**，若不實際運用這些技術，

是無法真正體會其便利及偉大的。

本書之所以沒有避開數學式的原因，是想要讓各位讀者們見證微積分計算的真實樣貌後，能夠發出「哇，好厲害！」的驚嘆，或突然頓悟地拍膝蓋說「原來如此！」。我相信這些過程也**能夠成為各位「下次親自嘗試看看」的範例**。

➢ 徹底填補「空白」的書

話雖如此，如果只是一味列出數學式的話，本書也沒有出版的意義了。相信只要翻閱一下內容就能明白，**本書在數式變形的詳細程度幾乎是其他書籍無法比擬的**。

另外，在數式變形的過程中會將使用的公式或過去學習到的內容盡可能編排在數學式附近，所以我認為在本書的數式變形裡不會有「搞不清楚在做什麼」的挫敗感。

當然，除了數學式，在文章中也準備了很多激發讀者好奇心的巧思，其中既有如綠洲般，幫助因數式變形感到疲累的腦袋放鬆的內容，也有**透過數學式探討，將數學作為「語言」來理解**的內容。

雖然很多人都說「微積分是高中數學的頂點」，但其實微積分在高中數學並不是最困難的部分。要說困難的話，我認為整數、集合還有機率也絲毫不遜色。

微積分被視為高中數學頂點的原因是，要理解微積分就必須先理解其他各式各樣單元的緣故。學習微積分，會有**原本分散的各個單元逐漸合而為一**的感受。我在高中時期，透過微積分曾多次感概「阿，原來那個單元就是為了此刻才學習的」。

本書為了讓各位登上高中數學的頂點，對於必要的函數（三角函數、指數函數、對數函數）、數列還有極限等內容都不會省略，而且將從原理及原則開始說起，這也代表我們並不是把山腰當作起點，而是打算從山腳下開始引導各位向前。

無論是數式變形，或者是作為前置的其他單元內容，這些被同類書略過的「空白」處都會盡可能地在書中詳細說明，也因此對於已經有基礎的讀者們可能會感到內容有些冗長拖沓。除此之外，也會有比我更專業的人指出數學方面不夠嚴謹吧。

即便這樣也無妨。這本書是為了**曾經學過微積分但只留下棘手印象（沒有深入理解）**，或者**雖然是文科生但對「理科的」微積分抱有高度興趣的人**所寫的。對於這些人來說，盡可能去填補那些「空白」會更有幫助，執著於學問的嚴謹性反而會對理解內容造成阻礙，這是從我多年的教學經驗中得到的結論。

對想要登上高中數學頂端的你，本書時而擔任領路人，時而化身成拐杖，而當踏上頂點的那一刻到來，本書的使命就結束了。然而你並不需要對之後的事感到擔憂，讀完本書後，你應該就具備獨自開始攀登下一座山頂的實力了，也應該可以享受那讓人眼前一亮的優雅數式變形，還有那無懈可擊、堅若磐石的數學嚴謹性吧。請拿出自信來，朝大學通識課的微積分參考書繼續前進吧。

只要腳踏實地一步一腳印，一定能到達高中數學的頂端。雖然很遺憾沒有纜車可以搭乘，但也因為如此，靠自己的雙腳站在上面時才更加喜悅。來吧，拿出勇氣踏出第一步！

本書適合的對象

- 以前學過微積分但沒有深入理解的理科生
- 初次接觸，想學習微積分的文科生
- 在學校學習微積分但一知半解的高中生

本書的特色

- 總結高中數學，完善對微積分的理解
- 大量使用直覺能理解的圖及圖表
- 透過詳細的數式變形理解數式計算的精髓
- 享受解開題目的喜悅

目　次

序言——站上高中數學的頂端吧 …… 1

第 1 部　微分之卷

§ 01　首先從「函數與圖形」的基礎開始 …… 8
§ 02　抓住變化的第一步——平均變化率 …… 20
§ 03　「等差」數列之和、「等比」數列之和 …… 28
§ 04　望向遙遠的彼端——數列的極限 …… 34
§ 05　攻略「分母為零」——函數的極限 …… 42

題外話①　零不能作為除數的原因 …… 48

§ 06　「微分係數」指的是切線斜率 …… 52
§ 07　物理方面的應用①：瞬間速度 …… 58
§ 08　排列、組合與「二項式定理」 …… 64
§ 09　自己動手推導微分係數公式！ …… 72
§ 10　分析變化——導函數與增減表 …… 78
§ 11　外部微分！內部微分！——合成函數的微分 …… 88
§ 12　利用數式變形推導——微分的乘法與除法 …… 98
§ 13　快速複習①：三角比與三角函數 …… 106
§ 14　用扇形來思考——三角函數的微分 …… 126

題外話②　日本人是否曾經涉足微積分？ …… 136

§ 15　快速複習②：乘方與指數函數 …… 140
§ 16　快速複習③：對數與對數函數 …… 158
§ 17　來微分對數函數及指數函數吧！ …… 174
§ 18　應用篇①：函數的最大值與最小值 …… 190
§ 19　應用篇②：利用直線近似函數 …… 202

第 1 部

微　分 之卷

$f(x)$

Differential Calculus

第 2 部　積分 之卷

§ 20　何謂積分？——微積分基本定理 …… 214
§ 21　推導不定積分與定積分的公式 …… 232
§ 22　積分的技巧——代換積分法 …… 246
題外話③　符號之王：萊布尼茲 …… 262
§ 23　定積分的應用①：求面積 …… 266
§ 24　定積分的應用②：求體積 …… 284
§ 25　物理方面的應用②：微分方程式 …… 296
題外話④　天氣預報不準的原因 …… 312

結語——前方道路的景象 …… 316

前扉頁　常用對數表

01 首先從「函數與圖形」的基礎開始

現在開始，為了讓各位理解**「何謂微積分？」**，我們將一步步朝著山頂邁進。雖然還在「登山口」就談論起「山頂上的風景」有劇透（或者是造成誤解）的風險，但請讓我冒著風險說，**微分就是「分析」，積分就是「總和」！**

在本書中，為了讓各位理解這一點，將依照

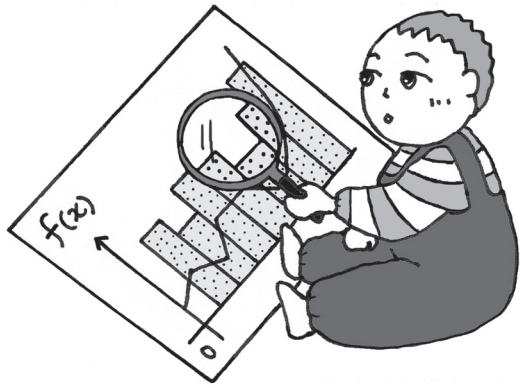
平均變化率的極限 → 微分 → 微分的反運算 → 積分 → 積分的含義

的順序來介紹。

關於「平均變化率」下一節會詳細說明，這裡我們只要先知道，「發現」微分的**牛頓**及**萊布尼茲**等人的目標是，針對球在斜坡上滾動的速度會**隨時間變化的現象進行深入分析**。

那麼，分析變化的現象指的是什麼？

指的就是將極小的變化放大後**抓住那個「瞬間」**！



話雖如此，一下子就要分析隨機變化的現象，門檻實在太高了。因此，本書提到的變化會在「某種確定的規則」下進行，換句話說，我期望的目標是，**能夠用微分來分析單一原因對應唯一結果的變化**。

所謂的「單一原因對應唯一結果」指的正是「**函數**」。

問題

請畫出下列函數 $f(x)$ 的圖形，請注意 $[x]$ 表示的是不大於 x 的最大整數。

$$f(x)=x[x]\ (-2\leqq x<2)$$

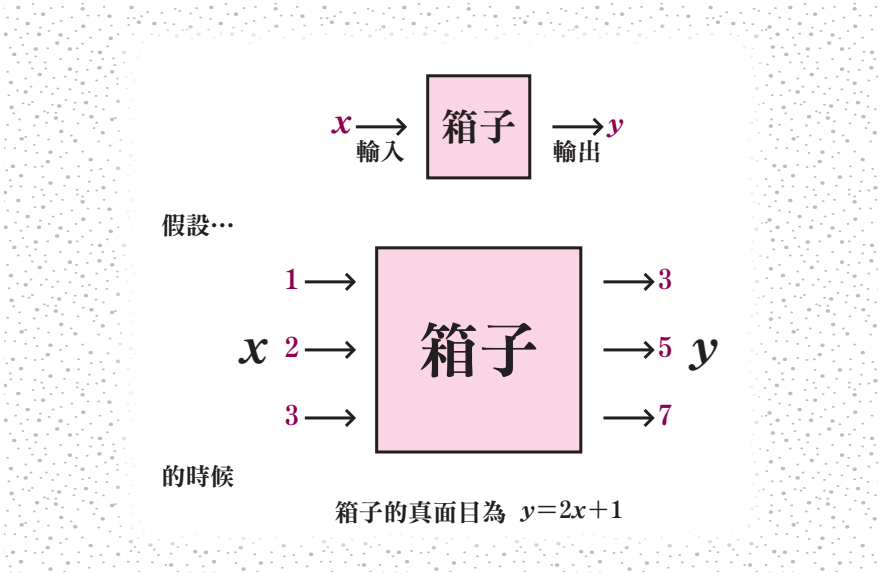
註）[ ]稱為高斯符號。

稍後會解釋……。

➢ 日文的關數就是「函數」

各位知道函數（日文為關數）在日文中原本也寫成「函數」嗎？原本在日文中「函」就是「箱子」的意思，所以日文的「關數」＝「函數」，指的就是「箱內的數」。

這名稱應該是將輸入的某個值（例如x）放入「箱子（函）」後，便會得到輸出的某個值（例如y）這種印象來命名的吧（下圖）。



◇ 函數 or 關數？

日本使用「關數」作為通用的表示方式是比較近代的事情。1958年，當時的文部省為了盡可能使用當用漢字（即現代常用漢字）來統一學術用語，編纂了《學術用語集》，而此舉直接成為改變的契機。在學習指導要領中，統一用「關數」作為表記是1969年後的事情，現在仍有一部分的數學家偏好用「函數」這個詞彙。

「y是x的函數」，用英文來說的話就是 *y is a function of x*，因為稍嫌冗長，在數學上會將其簡化成 $y=f(x)$ 來表示。

y若要成為x的函數，**其重要關鍵在於：根據x的值，y會有唯一的對應值**。如果是像「扭蛋機」一樣，箱子的輸出為隨機數值，同樣放入100元卻無法知道會得到什麼結果的話，作為函數的「箱子」是不及格的。

另外，即使輸出不是隨機，若輸出結果不是唯一的話，也不能稱作「函數」（參考下方註解）。

註）x與y的關係如下式時（實際上為圓的方程式）

$$x^2+y^2=5$$

y可以稱作是x的函數嗎？

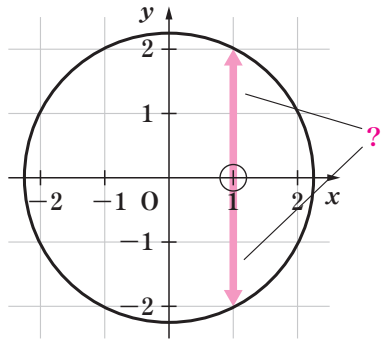
假設將$x=1$代入後

$\Leftrightarrow \quad 1^2+y^2=5$

$\Leftrightarrow \quad y^2=4$

$\Leftrightarrow \quad y=2$ or -2

根據上式會得到 $y=2$ 及 $y=-2$ 這2種可能，所以y不是唯一對應值。也就是說，這式子表示的y不能說是x的函數。



（針對進階讀者的補充說明）

「這不是隱函數嗎？」，相信部分讀者會有此疑問。若將上式視為隱函數來分析的話，通常只會考慮某一點周圍而已，在這樣的條件下確實能夠稱為「函數」，因為1個x會對應到唯一的y值。

重點整理 「函數」的定義

當 y 會根據 x 的值有唯一對應值時，即可說

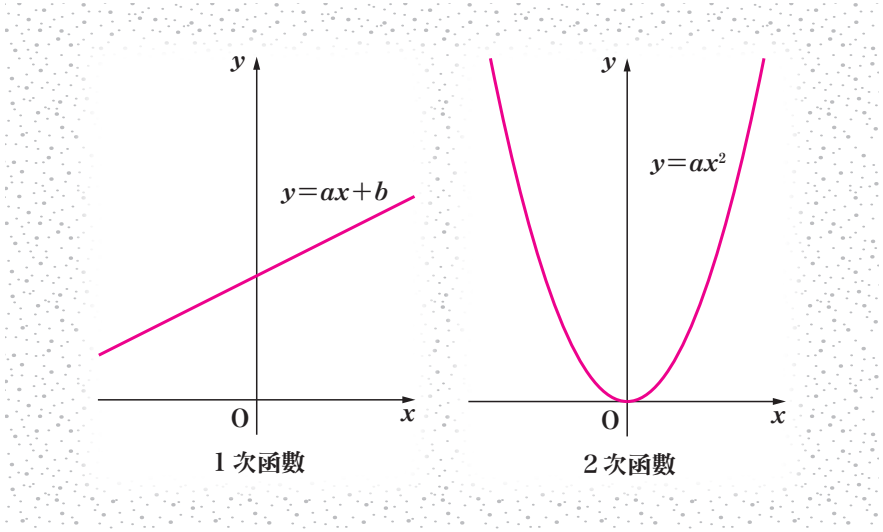
「y 為 x 的函數」

上述可以表示為下式。

$$y=f(x)$$

➢ $y=f(x)$ 的圖形

隨著 x 的變化，y 變化的情況用**圖形**來看便一目瞭然。在國中數學裡，我們學習過1次函數 $y=ax+b$ 及基本的2次函數 $y=ax^2$ ，其各自的圖形如下。

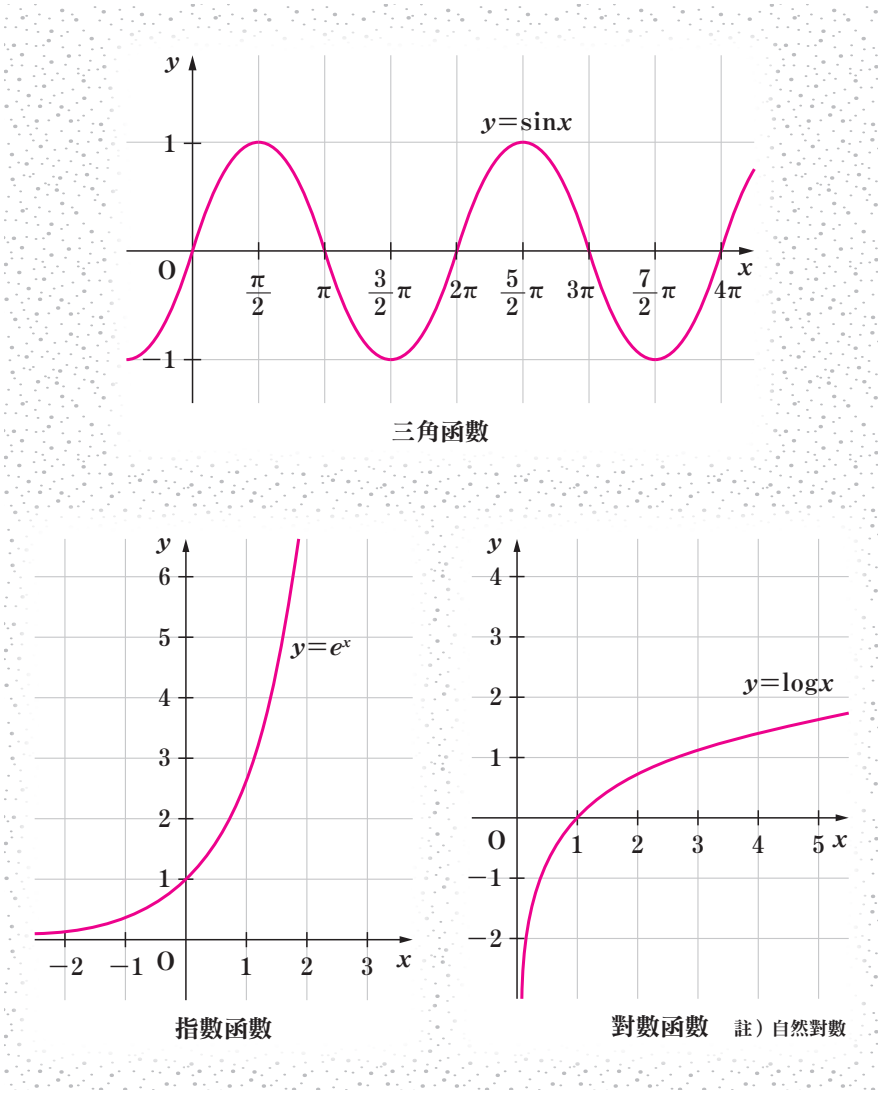


註）$y=ax^2$ 的圖形就是所謂的拋物線。

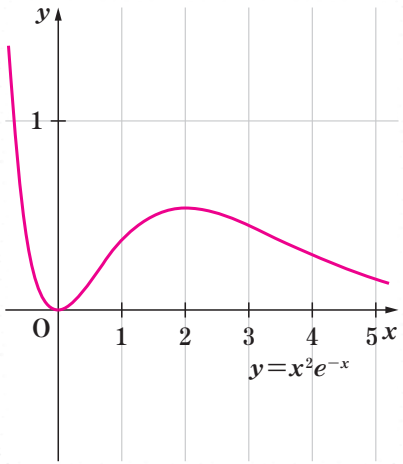
若 a 值（正確來說是 a 的絕對值）增加後，y 值會急速增加，整體圖形就會變成更狹長的形狀。

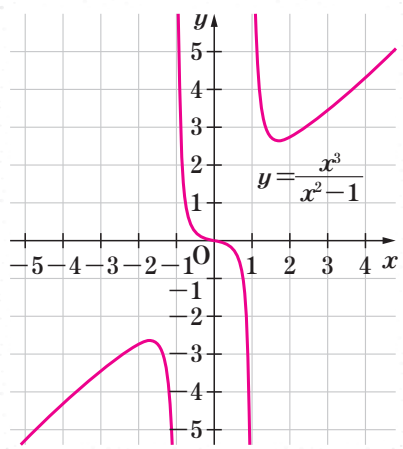
➢ 理解函數＝理解圖形

在高中數學尚未學習微分前所學到的函數只有1次函數、2次函數，還有三角函數、指數函數及對數函數（之後會逐一詳細說明），全部就這5種而已。這是因為在不使用微分的情況下，能（大致）看出變化的函數也只有這些了。

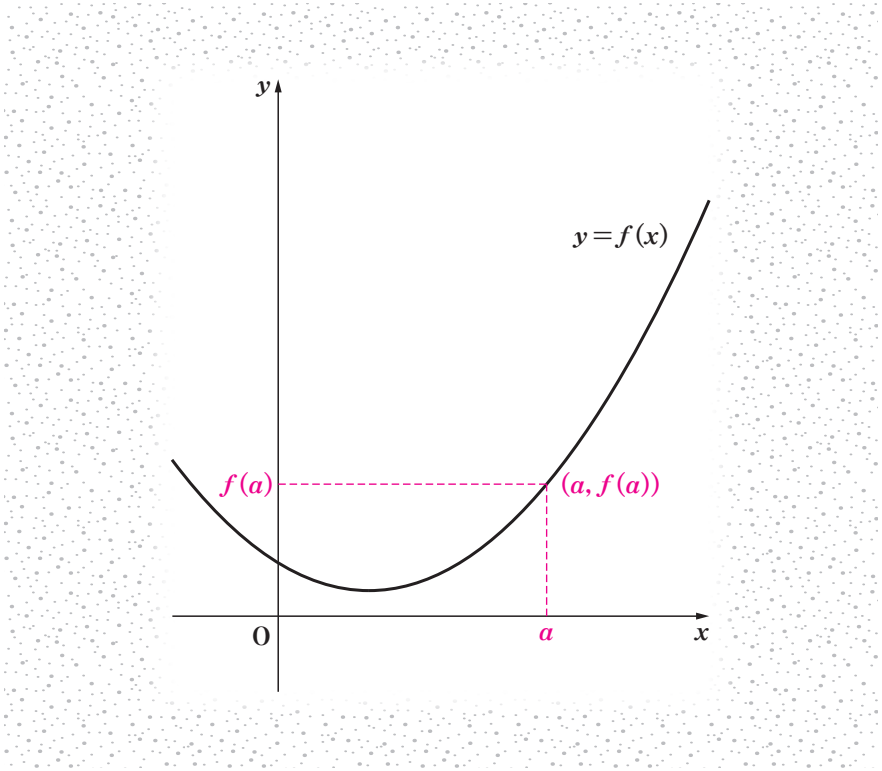


但**學習微分後不僅能分析複雜的函數，也能畫出函數的圖形來！**而且，能夠畫出該函數最大值及最小值的圖形，正是理解該函數的唯一方式，敬請期待接下來的內容！





$y=f(x)$ 的函數圖形指的就是，可以代入該式（並滿足該式）的點所組成的（集合）。將a值代入到 $y=f(x)$ 的x中可以得到（a, $f(a)$）的點，該點一定會在 $y=f(x)$ 的圖形上。雖說此為理所當然的事卻很重要，所以請容我強調這一點。



基於目前為止的內容，我們再回頭看看開頭的問題。

解答

問題於第9頁

題目中提到，「$[x]$表示的是不大於x的最大整數」，這裡的$[\ \ ]$稱為**高斯符號**。具體說明如下。

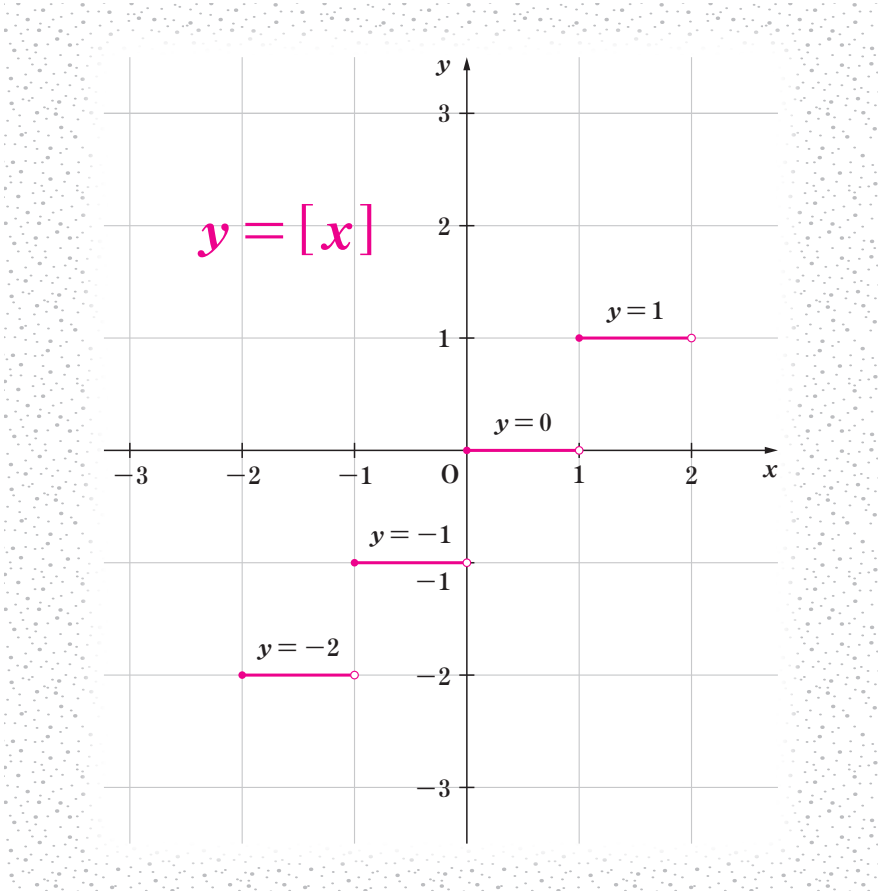
$[-0.5]=-1$（不大於-0.5的最大整數為-1）

$[0]=0$（不大於0的最大整數為0）

$[0.5]=0$（不大於0.5的最大整數為0）

$[1]=1$（不大於1的最大整數為1）

將高斯符號畫成圖形後，就會變成下列的階梯狀圖形。



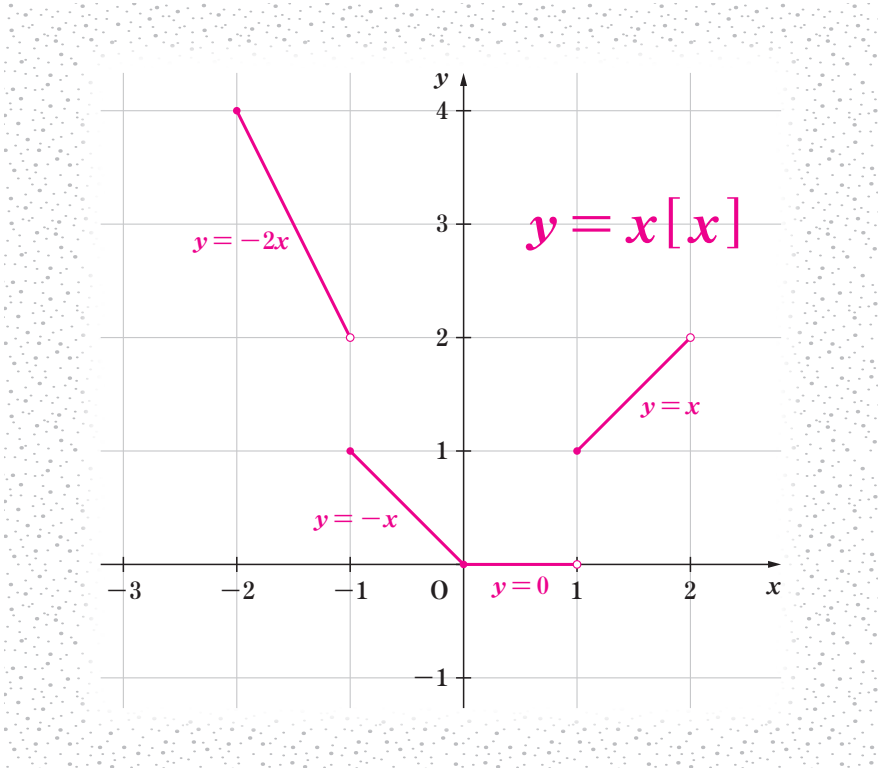
一邊看左邊的圖形，一邊將各個階梯的部分寫成數學式看看吧。

$$[x]=\begin{cases}-2 & (-2\leqq x<-1)\\ -1 & (-1\leqq x<0)\\ 0 & (0\leqq x<1)\\ 1 & (1\leqq x<2)\end{cases}$$

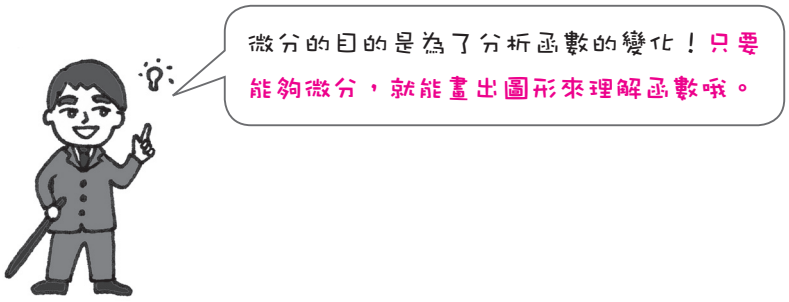
×x　在兩邊　乘上x　×x

$$x[x]=\begin{cases}-2x & (-2\leqq x<-1)\\ -x & (-1\leqq x<0)\\ 0 & (0\leqq x<1)\\ x & (1\leqq x<2)\end{cases}$$

原本井然有序的階梯狀圖形，變成像下一頁散亂的圖形。



這個函數最終可以分解成幾個1次函數或常數（全都是直線），因此沒有必要用微分來畫出圖形，但更複雜的函數就另當別論了。



Column



卡爾・弗里德利希・高斯
（1777-1855）

如果有「人類史上最擅長數學的三大人物」排行的話，卡爾・弗里德利希・高斯毫無疑問是與阿基米德還有牛頓一同名列的大天才。據說他幾乎影響了近代數學的所有領域，而且在物理學領域也留下不少成就。

高斯從小就將才華發揮得淋漓盡致，也流傳許多關於他的神童事蹟，其中有一個故事特別著名。

高斯10歲時，學校的老師故意刁難，出了道題目請學生將1到100的數字全部加起來，在其他學生埋頭苦算時，高斯用下列方法一下子就得到答案。

高斯少年的思考方式

$$
\begin{array}{rrcccccccccc}
 & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots & 98 & + & 99 & + & 100 \\
+) & S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + \cdots & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + \cdots & 101 & + & 101 & + & 101 \\
 & & = & 101 \times 100 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

因此得出 $S = 101 \times 50 = 5050$

當然，他事先並不知道這個方法，據說是在當下靈機一動得出的答案，順帶一提，按照上面的思考方式就能夠導出「等差數列和的公式」（P31）。老師大概驚訝得說不出話來吧……。

02 抓住變化的第一步——平均變化率

為了深入理解微分（不僅僅是表面而已），從現在開始我們會分成幾個小節來做準備。首先是「平均變化率」！對試圖分析函數的人類而言，會想先「取平均看看吧」是很自然的事。當然，用平均變化率來觀測變化也只能看到大致情況而已，但對於挑戰函數來說無疑是**人類重要的第一步**。

問題

設函數 $f(x)=2x^2+1$，請求出x從a變化到b時的平均變化率。

所謂的「**變化率**」指的就是在國中數學提到的「**變化的比例**」。變化的比例定義長什麼樣子呢？答案是，

$$\text{變化的比例（變化率）}=\frac{y\text{的變化量}}{x\text{的變化量}}$$

假設$y=2x+1$時，x從1變化到3的對應關係就像下表，

x	1	→	3
y	3	→	7

根據表格可以計算為

$$\text{變化的比例（變化率）}=\frac{7-3}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

但「變化的比例」這種說法似乎有些幼稚（？），所以之後請讓我統一用「變化率」來稱呼。

接下來，讓我們看看變化率在圖形上代表什麼意義吧。從下圖中的點 A(1, 3) 和 B(3, 7) 來看，「x的變化量」是以AB為斜邊的直角三角形的「橫向」長度，「y的變化量」為「縱向」長度。也就是說，**變化率代表的就是「斜率」**。

$$\text{變化率}=\frac{y\text{的變化量}}{x\text{的變化量}}=\frac{\text{縱向}}{\text{橫向}}=\text{斜率}$$

