超好懂！

微積分概念筆記

實務應用×具體解說×公式剖析
懂乘除法就能掌握微積分





藏本貴文／著
林詠純／譯

前言

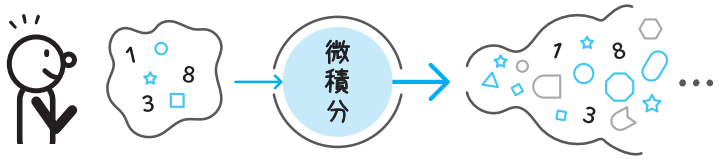
對許多人來說，高中所學的數學當中，最實用的就是微分與積分了（以下簡稱微積分）。

因為學了微積分之後，就能從數字當中獲得2倍以上的資訊。

現代人不管擅長還是不擅長，都離不開數字。金錢、收益率、顧客人數、客單價、持續率、平均時間、周轉率、產能利用率、不良率……等等，現代人的生活不就是圍繞著這些數字打轉嗎？

學習微積分之後，就能從這些數字當中抽取出更多的資訊。

優秀的人能夠聞一知十，學習微積分之後就能從原本的數字當中獲得加倍的資訊，因此在他人眼中看起來優秀是理所當然的。



話雖如此，就算看不懂日本高中的微積分也不需要感到沮喪。因為微積分的本質，並不像在學校所學的那樣錯綜複雜。

希望讀者能夠仔細閱讀本書的第1章。你至今用來分析數字的一般方法當中，就包含了許多微積分的概念。

沒錯，將變化與累積整理而成的數學體系就是微積分。

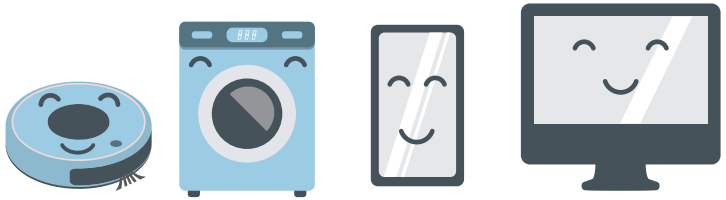
你周圍的數字也充滿了微積分，但最能夠發揮其力量的就是理工領域。無論是行駛的汽車、飛行的飛機、搭建的大樓、通話的手機，還是幫助我們

的機器人，都離不開微積分的力量。

而這些文明利器當中，對於現代社會而言最重要的就是電腦了，因為電腦是世界上唯一能夠「思考」的非生物，而且在社會上的各個角落大顯身手。個人電腦當然不在話下，無論是手機、汽車，還是冰箱、吸塵器、洗衣機等家電，電腦都在裡頭發揮著作用。

換句話說，電腦就像在我們身邊協助我們生活的夥伴。因此了解這位夥伴的思考邏輯就很重要對吧？就和理解公司的同事、上司以及下屬的想法同樣重要。

而電腦的思考邏輯就是數學。學習數學，以及其核心的微積分，能夠幫助我們理解電腦的「心情」。



不好意思，現在才自我介紹。我是半導體工程師蔵本貴文。各位或許會覺得平常寫這種數學書的人，多半都是數學老師或是教育工作者。但我兩者都不是。

我的專業領域是「建模」，這項工作沒有數學就無法成立。我在工作中運用三角函數、指數、對數、矩陣、複數以及微積分，以數學公式展現半導體元件的特性。

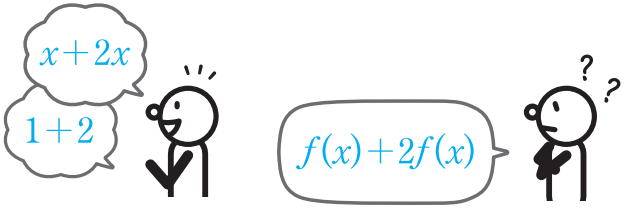
所以我討論的不是作為學問的數學，而是「作為實務應用的數學」。世界上有許多由數學專家撰寫的數學書，但我想一般人需要的說不定是我所使用的數學。

我的女兒升高中了，而我教她數學與物理的機會也愈來愈多。在這樣的過程中，我發現數學難以理解的原因就在於太過抽象。

我發現到，當女兒說著「這個問題我不懂」的時候，最容易幫助她理解數學的方法，就是在文字裡加入數字、繪製圖形或圖表等，把抽象的敘述變得具體。

舉例來說，日本的高中生就算再怎麼害怕數學，應該也沒有人不會計算「$1+2$」。

但如果換成「$x+2x$」，或許就會有些學生看不懂了；要是再進一步換成「$f(x)+2f(x)$」，就算是原本數學還行的學生，都有可能會陷入苦思。儘管這些計算在本質上完全沒有不同。



使用這些文字與符號的抽象表現，會嚴重妨礙理解。當然，數學就是因為抽象化才能擁有今天的發展。所以最後的結論還是必須理解抽象的表現會比較好。

然而對許多人，尤其是對初學者而言，這些抽象表現反而墊高了學習的門檻。

所以本書徹底堅持採用具體的描述。如果非得使用x、$f(x)$、$\frac{dy}{dx}$、$\int$之類的抽象文字與符號，就會加上詳細並且具體的說明。

除此之外，數學公式因為太過抽象而容易遭人厭惡。所以本書直到第2章為止都不會使用任何數學公式。我有自信，即使是討厭公式的人，也很容

易理解我對微積分的說明。

那麼就歡迎大家來到微積分的世界。培養微積分的思維，必定能夠提高處理數字的能力、滿足好奇心，幫助大家在一定程度上理解電腦的心情。

接著就來看看微積分的本質吧！雖然我很想這麼說，但請再稍微看一小段導讀。我想就各位讀者的類型，給大家一些使用本書的建議。

本書的閱讀方式

本書的結構如下。

本書的內容基本上一開始最為容易，而愈往後將會愈來愈難。即使從某個部分開始就看不懂了，前面獲得的知識也足以帶來幫助。因此讀懂多少便能學到多少，請放心閱讀下去。

此外，重要的內容將會不厭其煩地一再重複強調，譬如「微分求的是斜率」。已經理解的人或許會覺得囉嗦，但我相信如此重複能夠有助於初學者的理解。

本書共分成7章，以下是每一章的主要目標。

第 1 章　微積分能提供如此的觀點

➡提供一些日常生活中使用微積分的實例，譬如財務管理和汽車等。（不使用數學公式）

第 2 章　微積分到底是什麼？

➡從國小學習範圍的速度、時間與距離之關係來說明微積分的意義。如果能夠讀懂這個部分，就能理解微積分是什麼。（不使用數學公式）

第 3 章　為什麼要使用數學公式？

➡透過到第2章為止的說明，理解微積分是什麼之後，接下來將說明以數學公式來表現微積分的理由。想必能讓各位充分理解到使用數學公式的優點。

第 4 章　微積分在數學世界的地位

➡本章將呈現日本高中微積分的全貌，但只會呈現全貌，不會去問「為什麼」。請先專心去觀察微積分這片「森林」。

第 5 章　借助無限的力量讓微積分更完美

➡本章將透過數學的背景，來解釋第4章說明的微積分全貌為什麼能夠成立。雖然我盡量寫得容易理解，但讀完到第4章的內容就足以學會微積分的計算，因此即使看不懂本章也不用擔心。

第 6 章　微分方程式能夠預測未來

➡針對「預測未來」的微分方程式進行深入的數學說明。這個部分在本書當中屬於相對較難的內容。

第 7 章　關於微積分的其他主題

➡本章整理了指數函數與三角函數的微積分、積分技巧等，雖然對於呈現微積分的整體樣貌並非必要，但這些都是學習微積分的重要主題。

本書主要針對以下3種類型的讀者撰寫。我想要先針對各個類型的讀者，提出閱讀本書的建議。

①完全不懂微積分的讀者、因為想要理解「微積分」到底是什麼而拿起本書的讀者

②希望能夠更加深入理解數學課所學的內容，因此找來本書當成預習、複習以及課本補充教材的學生

③原本就擅長數學，但希望能夠更深入理解的讀者；或是想要以更簡單易懂的方式傳授數學而拿起本書的數學老師

①完全不懂微積分的讀者、因為想要理解「微積分」到底是什麼而拿起本書的讀者

你可能不太擅長數學公式。但是請放心，本書的第1章和第2章都沒有使用數學公式。即使只閱讀這個部分，你應該也能理解微積分的概念，以及微積分如何帶給這個世界幫助。

如果還能進一步挑戰第3章的內容就太完美了。只要讀懂這些部分，就算不使用數學公式，也稱得上是理解微積分。

當然，如果還有興趣，也可以試著挑戰第4章之後，使用數學公式的微積分。你將會看見更深奧的數學世界。

請將閱讀本書的目標設定成如下：理解微積分的基本概念就是觀察「變化」與「累積」；「速度、時間與距離」的關係中存在著微積分的本質；以及數學公式雖然討厭但有用。

我想只要你意識到自己也正在使用微積分的概念，就會發現微積分其實離自己並不是那麼遙遠。不是只有充滿數字，彷彿密碼一般的複雜微積分才是微積分。

②希望能夠更加深入理解數學課所學的內容，因此找來本書當成預習、複習以及課本補充教材的學生

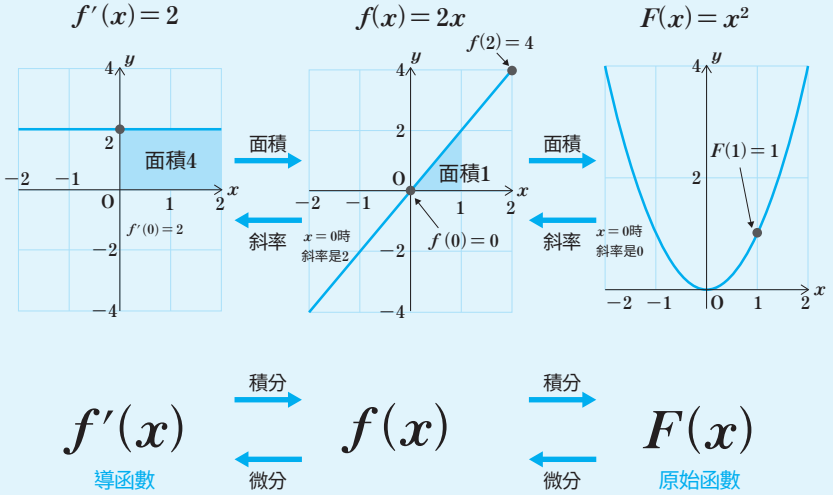
我猜想，如果給你一個函數要求你微分，你應該能夠做得到；如果遇到求面積的積分問題，你應該也會計算吧？但你或許不清楚這些計算有什麼意義，總覺得有顆大石頭壓在心裡。

我會建議你快速讀過第1章與第2章後，仔細閱讀第3章。因為本章說明了這些公式存在的意義。只要能夠理解這個部分，你就會知道函數是什麼，為什麼會存在著數學公式這種讓人覺得麻煩的東西。

接下來的第4章則是重點。只要你能夠理解4-5節「微積分的結構」，我保證那些原本看起來毫不相關的微分與積分，只要一下子就能整合進你的腦海裡。

第5章和第6章或許有些困難，但只要能夠理解，你就能觸碰到極限與微分方程式等微積分的核心部分。至於第7章呈現的微積分結構，雖然偏離本書主軸，但如果想要朝著理工科的道路前進，就必須懂得這個部分。

微積分的結構 ※節錄自本書116頁



③原本就擅長數學，但希望能夠更深入理解的讀者；或是想要以更簡單易懂的方式傳授數學而拿起本書的數學老師

如同「前言」的說明，我是使用數學的工程師，不是數學專家。因此各位可能會注意到我在數學上有些地方不夠嚴謹，又或是太過粗暴。但希望各位能夠換個角度，把「原來也有這種看待數學的方式」當成樂趣。

我認為數學之所以困難是因為太過抽象。所以我在本書當中，堅持一定要用具體的方式來解釋。如果各位能夠想到其他能讓微積分更加具體的方法，請務必與我分享，我將不勝感激。

此外，我想告訴從事數學教育的人，微積分之所以會讓人感到困難，原因之一或許就在於學習順序。課本通常依照極限→微分→積分的順序教學。然而這麼一來，不就會讓學生因為複雜的微分定義而感到精疲力盡，從而失去學習的動力嗎？

因此我在本書當中將順序反過來，首先介紹微積分的作用——積分求的是面積、微分求的是斜率。而後說明計算方式，最後才解釋定義。

我個人認為，這是對初學者而言最容易理解的順序，如果您有任何意見，也希望能夠和我聯絡。

INDEX

目次

Page

前言 003

本書的閱讀方式（接續前言） 007

Chapter 1　微積分能提供如此的觀點 015

1-1　利用微積分觀察病毒感染 016

1-2　汽車中所使用的微積分 021

1-3　利用微積分來分析金流 026

1-4　智慧型手機中的微積分 031

Chapter 2　微積分到底是什麼？ 037

2-1　「VTS」的關係與微積分 038

2-2　積分是求出面積的「超級乘法」 043

2-3　微分是求出斜率的「超級除法」 050

2-4　利用微分預測彗星的軌道 054

2-5　利用微積分控制油溫 058

Chapter 3　為什麼要使用數學公式？ 063

3-1　利用數學公式以預測未來 064

3-2　什麼是函數？ 068

重點　反函數 072

3-3　熟悉圖形吧！ 073

3-4　如何建立數學公式 076

3-5　模擬的背後存在著微分方程式 081

3-6　支撐科技的微分方程式 084

3-7　數學公式的特徵 088

重點　如何看懂對數圖 092

Chapter 4　微積分在數學世界的地位 095

4-1　用積分求面積 096

4-2　用微分求斜率 099

4-3　導函數是「斜率的函數」 104

4-4　積分是微分的逆運算 108

4-5　微積分的結構 115

4-6　微積分使用的符號 117

4-7　微積分的計算方式 121

4-8　歐拉常數為何如此重要？ 125

Chapter 5　借助無限的力量讓微積分更完美 127

5-1　圓面積公式真的正確嗎？ 128

5-2　思考極限的理由 133

5-3　利用極限思考微分 138

重點　$f'(x)=nx^{n-1}$對於自然數以外的 n 也成立 143

5-4　利用極限思考積分 144

重點　Σ符號的使用方法 149

Chapter 6　微分方程式能夠預測未來 151

6-1　微分方程式是什麼樣的方程式？ 152

6-2　運動方程式能夠預測物體的運動 155

6-3　透過微分方程式知道化石的年代 160

6-4　計算生物的個體數 163

6-5　體重在赤道和北極會不同 170

6-6　微分方程式的極限 176

Chapter 7　關於微積分的其他主題 179

7-1　指數、對數函數與其微積分 180

7-2　三角函數與其微積分 186

7-3　函數的增減 191

7-4　各種微積分技巧 194

7-5　也能利用積分求出體積和曲線長度 198

索引 205

CALCULUS

微積分能提供如此的觀點

Chapter

1

我想各位在學習微分積分時，首先會想要知道這到底是一門什麼樣的學問，又是如何發揮作用的。所以本章介紹的例子幾乎不使用數學公式就能理解微分與積分的思想。

微分與積分的概念是一種分析數字的手段，廣泛地被使用於這個世界，你說不定也在不知不覺中使用過。在你閱讀本章之後，就會知道微分與積分的觀點能夠對分析數字帶來幫助。

「咦，原來這就是微積分的概念啊！」如果可以讓你有這種感覺，那麼本章的目的就算達成了。

CALCULUS

1－1 利用微積分觀察病毒感染

下表依照時間順序，顯示某地區感染病毒的人數。

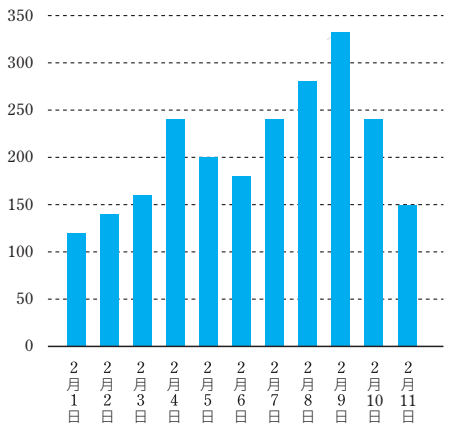
2月1日	2月2日	2月3日	2月4日	2月5日	2月6日	2月7日	2月8日	2月9日	2月10日	2月11日
120人	140人	160人	240人	200人	180人	240人	280人	330人	240人	150人

從這張表中，你可以看出什麼呢？你或許會隱約察覺到新增感染者數正在增加，以及人數反覆地增增減減。

然而實際上，絕大多數的人或許都覺得「其實不太清楚到底發生了什麼事……」。在這種時候，只要將這些數據轉換成圖形，多半就能更容易有具體的概念。

所以我們就將其畫成柱狀圖。

新增感染者數

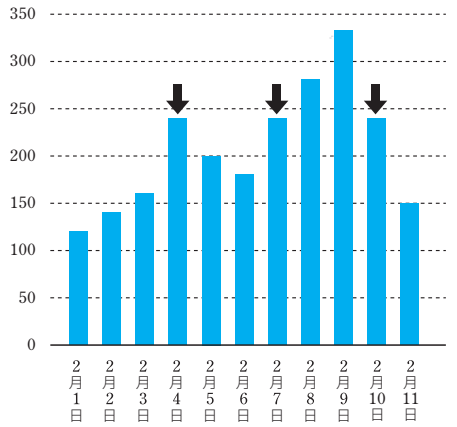


像這樣畫成圖形來看，就更容易理解原本只是數字列表的感染者數量。

人數的增減也更加清楚。

舉例來說，在這張圖當中，2月4日、7日和10日的新增感染者數都是240人，但數字上的意義看起來卻不相同。

新增感染者數



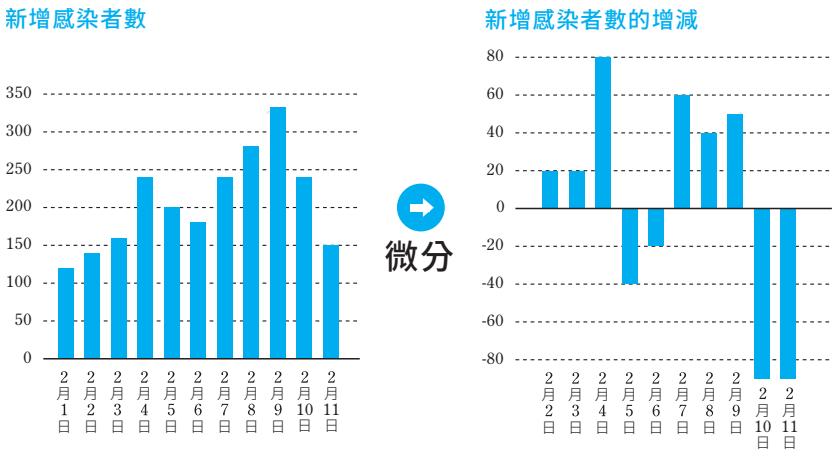
4日的240人看起來像是高峰值，7日是增加的過程，10日則似乎是減少的過程。由此可知，即使都是240人，其意義也會有所改變。

如果只單看「240人」這個數字，是看不出這種變化的，只有著眼於數字的趨勢變化才看得出來。而這其實就是微分的概念。

接下來會再更加詳細地說明微分的概念。請看次頁的下一張圖。

這次試著與前一天進行比較，將新增感染者數的增減繪製成圖。關於這張圖的繪製方式，舉例來說，比較2月3日與4日，新增感染者數增加了80人，所以 2月4日在圖中就是＋80人；比較2月4日與5日，新增感染者數減少了40人，所以2月5日就是－40人。

像上述這樣根據新增感染者數的圖，繪製人數增減的圖就是「微分」。或許我們也可以說，「微分」關注的是增減。



就算是完全不懂微分的人，看到數字時也會自然而然地關注其前後的變化吧？

這就是不折不扣的微分概念。數學中的微分，只不過是將這個方法以數學的方式給予嚴謹的定義。

而且繪製圖形本身，也可被視為以微分觀點看待事物的一種輔助。

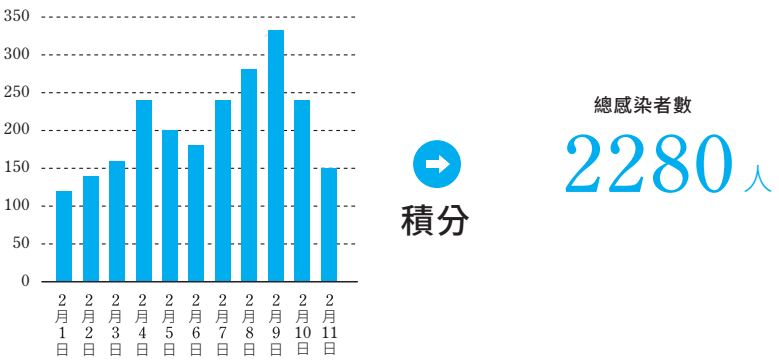
這裡的新增感染者數，原本只是在表格中呈現的數字。將這些數字繪製成柱狀圖，看起來就變得清楚多了。因為繪製成圖之後，就能夠以視覺方式與前後的數據比較大小。

所以圖形本身也稱得上是微分觀點的輔助工具。

各位是否掌握了微分的概念了呢？

接著來看看積分的概念。如果說微分關注的是變化，那麼積分關注的就是總和了。

以剛才的感染者數為例，如果將1日到11日的新增感染者全部加起來，就能知道這段期間的新增感染者數是2280人。



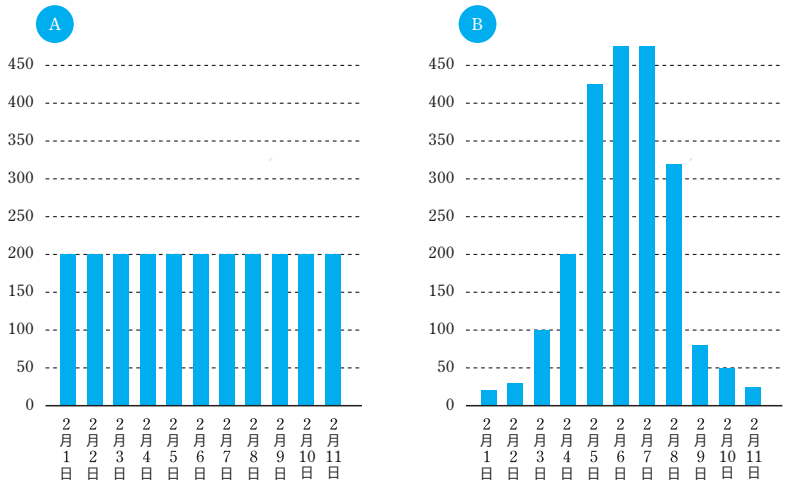
從新增感染者數計算出總感染者數「2280人」，這個數字就等於是意味著積分。

討論感染者數時，計算總感染者數（累積總數）的重要性到底有多麼關鍵，自然是不言而喻。因為累積總數會影響決策判斷，而計算出這個重要的數字就是積分。

接著再稍微說明累積總數的重要性。

舉個例子來說，請看接下來的2張圖。在次頁的第1張圖中每天維持相同的新增感染者數，但是在第2張圖的新增感染者數則呈現急遽地增加，並且也急遽減少。

A與B乍看之下截然不同，但是實際上總感染數都是2200人。



換句話說，圖表看起來完全不一樣的A和B，可以用「總感染者數2200人」這個相同的指標來概括。

如果你是政府或醫療的負責人，你就可以計算2200人占總人口數的比例，推估獲得群體免疫的狀況。

觀察新增感染者數這樣的數字時，只看某一天新增感染者數的人，與理解微積分的概念、能夠分析包含變化及累積總數在內的人，即使看到的數字相同，但能夠獲得的資訊卻不相同。

從同樣的數據（數字）中能夠得到1還是10，取決於掌握了多少數據分析的技巧。而微積分在這當中，就扮演著重要的角色。

CALCULUS

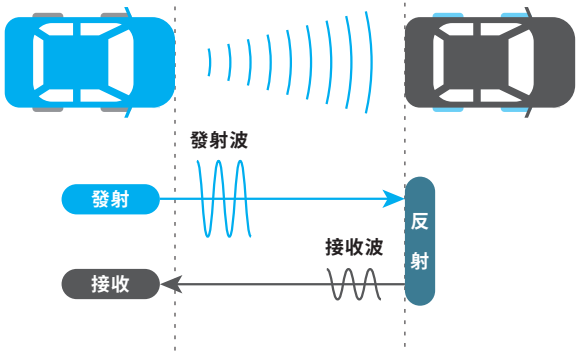
1－2 汽車中所使用的微積分

我們平常無意識使用的工具與機械中，也運用了大量的微積分。而接下來將會介紹微積分在汽車領域的應用。

近年來，配備自動剎車系統的汽車愈來愈多。這個系統能夠在汽車快要撞到物體時自動剎車，因此如果配備了這樣的系統，就會讓人對行車安全感到相當安心。

毫米波雷達經常使用於自動剎車的偵測系統，能夠發射出稱為毫米波的脈衝型電波，並根據撞到物體後反彈的時間，測量與物體之間的距離。

電波的速度和光速一樣保持恆定，因此只要計算發射出去的電波碰撞到前車再反彈回來的時間，就能得知與前車的距離有多遠。



各位聽到電波或許會感到複雜，但簡單來說，可以想成是利用把球丟出去再反彈回來的時間測量距離。兩者的原理完全相同。

舉例來說，假設如次頁圖一般，丟出一顆秒速20m的球，而球撞到牆壁再反彈回來需要5秒（速度保持恆定），就可以計算出我們到牆壁的距離是50m。