# 序言

先問各位以下幾個問題，大家知道原因嗎？

- 為什麼負負得正呢？
- 為什麼$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.732$呢？
- 為什麼$y = 2x - 1$的圖形是直線呢？
- 為什麼球的體積公式是$\frac{4}{3}\pi r^3$呢？

以上四個問題都是國中學習的計算、函數、圖形等數學公式。

但是，如果問「這是為什麼呢？」應該只有少數人能夠準確回答其中的理由。

那麼，究竟該怎麼做才能自信滿滿地回答「為什麼會這樣」的提問呢？

那就是**必須理解「規則」及「事實」的觀點**。

學生時期不明白數學公式的原理，只靠囫圇吞棗死背的人，如果能理解「規則」及「事實」的不同觀點，數學觀念將產生180度的轉變，理解程度將有驚人的提升。

我上一本從「規則」及「事實」的觀點，解說小學的算術教科書《從原理開始理解數學：計算×圖形×應用》，多虧讀者支持，獲得廣大迴響。

能夠幫助許許多多社會大眾令我感到欣喜，但同時也令我再次深刻體會竟有那麼多社會人士在學生時期學習數學只靠死背。

本書是繼算術主題推出的第二彈，如同一開始舉出的國中數學計算、方程式、函數、圖形等公式，從「規則」及「事實」的觀點，解說「為什麼會這樣？」

此外，為了讓各位更進一步體會數學的樂趣，本書更推出「通則、特例」的觀點，若是能注意到「通則」，就能快速擴大理解相關的問題，明白國中數學與高中數學的關係，令數學的學習更有趣，因此，為了讓更多人體會其中樂趣，我在本書舉了許多「通則」的例子。

本書和前作同樣透過兩名角色的對話形式——扮演教師的「Masuo」和不擅長數學的社會人士「瑪莉」，並在解說時兼顧「淺顯易懂」及「周全明白」的原則，讓學生時期不擅長數學的讀者，也能輕鬆愉快地閱讀。

若能讓學生時期對國中數學感到「無聊」、「痛苦」的讀者，透過本書發現數學的樂趣，將是我最大的榮幸。

難波博之

# CONTENTS


序言 …… 2

課外活動①
學校沒教的超奧妙國中數學世界 …… 8

課外活動②
「通則」讓國中數學簡單十倍，變得更有趣！ …… 14

第1章 公式與計算

正負數①
0並不是「空無所有」的意思？ …… 20

正負數②
為什麼負負得正？ …… 32

文字式
為什麼「a×b」要寫成「ab」呢？ …… 40

展開式
為什麼$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$呢？ …… 45

展開式的「通則」
$(a+b)^3$、$(a+b)^4$等展開式的指數增加會怎麼樣？ …… 50

因式分解
為什麼$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$呢？……57

因式分解的「通則」
因式分解也能建立通則嗎？……62

根號
為什麼$\sqrt{3}\fallingdotseq1.732$呢？……67

指數定律
為什麼$a^2\times a^3=a^5$呢？……75

## 第2章 方程式與函數

方程式的移項
為什麼運算符號換邊就會改變呢？……86

聯立方程式
什麼是聯立方程式？……93

二次方程式
二次方程式的2種解法……101

函數
什麼是「函數」？……111

一次函數
為什麼y＝ax＋b的圖形是直線呢？ …… 118

拋物線
為什麼y＝$ax^2$的圖形稱為「拋物線」呢？ …… 130

## 第3章 圖形

相似形
「相似三角形」的規則與事實 …… 140

畢氏定理
為什麼直角三角形的邊長關係是「$a^2+b^2=c^2$」？ …… 150

三角板
為什麼三角板的規格是「45° 45° 90°」和「30° 60° 90°」呢？ 167

中點座標
為什麼中點座標要用「平均」找出來呢？ …… 173

球的體積
為什麼球的體積公式是$\frac{4}{3}\pi r^3$呢？ …… 187

補充：平方和
說明$1^2+2^2+3^2+\cdots+(N-1)^2+N^2=\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$ …… 204

正負數 ②

# 為什麼負負得正？

## ⊕ 什麼是「負數的倍數」？



理解0與負數規則後，我們接著來想一想負數的乘法運算。



負數的乘法運算？



是的。例如下列的算式。

$2\times(-3)=-6$

$(-2)\times(-3)=6$



這麼一說，我記得有個口訣，

**正負得負**

**負負得正**

是這樣嗎……？



沒錯。妳知道理由嗎？



呃，我記得老師教的時候只說「直接背起來就對了」。
其中的「負負得正」，實在是不懂為什麼……。



的確如此。這是很難的主題。應該是很多人在國中數學最先遇到的挫折。

## ⊕ 證明「負負得正」



那麼，接下來我先說明為什麼「負負得正」。



這是……呃……。
因為$2\times(-3)$有2個$(-3)$，所以$(-3)+(-3)=-6$
是這樣嗎？



雖然這麼說明也沒有錯。不過，我們不妨試著以「事實（定理）」和「進一步證明」的形式來理解。



什麼？這也可以證明嗎？



是的，我們來證明以下的事實吧！

**負數乘法運算的事實**

$a\times(-b)=-(a\times b)$

尤其是

當a和b都是正數時，可以得出

「正數 × 負數＝負數」

以上的算式。



原來如此，要證明的是這個事實。



是的，所以我要運用負數規則來證明。

根據「負數規則」

$(-b)+b=0$

根據「等式性質」，兩邊都乘以a

$a\times(-b+b)=a\times0$

再根據「0的乘法事實」，不論任何數乘以0都等於0，

所以右邊等於0：

$a\times(-b+b)=0$

根據「分配律」，左邊稍微改變寫法

$a\times(-b)+a\times b=0$

然後根據「等式性質」，兩邊都加上$-(a\times b)$

$a\times(-b)+(a\times b)+\{-(a\times b)\}=0+\{-(a\times b)\}$

左邊運用「負數規則」

$a\times(-b)=0+\{-(a\times b)\}$

右邊運用「0的規則」，得出

$a\times(-b)=-(a\times b)$



哇！好厲害……。

運用剛剛說過的負數規則、0的規則等，就可以確實證明耶。



實際把數字代入a和b的位置再看一次。

●以a＝2，b＝3代入來想想看。

根據「負數規則」

$-3+3=0$

根據「等式性質」，兩邊都乘以2

$2\times(-3+3)=2\times0$

再根據「0的乘法事實」，右邊等於0，所以

$2\times(-3+3)=0$

根據「分配律」，左邊改變寫法

$2\times(-3)+2\times3=0$

根據「等式性質」，兩邊都加上$-(2\times3)$

$2\times(-3)+(2\times3)+\{-(2\times3)\}=0+\{-(2\times3)\}$

左邊使用「負數規則」

$2\times(-3)=0+\{-(2\times3)\}$

右邊運用「0的規則」，得到

$2\times(-3)=-(2\times3)$



代入實際的數字，就容易懂了。



與其思考「負數的倍數是什麼樣子？」我認為理解事實並進一步證明，更能徹底理解。

函數

# 什麼是「函數」？

## ⊕ 什麼是「函數」？



方程式先在這裡告一段落，接下來我們來談談「函數」吧！



函數！已經進入「這真的在講數學！」的領域了呢。



我們先複習一下函數的規則。

**函數規則**

「當變數x值確定時，也會確定與x對應的變數y，而y是x的函數」。



有點難懂耶～（汗）。



舉例來說，我們可以想一想$y = 2x$的函數。



當x值確定時，就會確定這個算式中的y值是嗎？



是的。我們實際代入x值來確認一下。

當x＝0時，y＝2×0＝0
當x＝1時，y＝2×1＝2
當x＝2時，y＝2×2＝4

就像這樣，當x值一確定，對應的y值就跟著確定。這樣的對應關係就稱為函數。



我想起來了！



像剛剛的「y＝2x」，能以y＝ax來表現的「關係」，稱為比例關係。

這裡先將y＝ax的函數關係稱為「比例」。

比例時常出現在我們的日常生活中。

比方說如下的實例。

### 日常生活中的比例關係實例

- 汽車在時速 50 公里而行駛 x 小時的移動距離以 y 公里表示，也就是 $y = 50x$
- 1 公克 2 元的沙拉，買 x 公克所需的金額以 y 元表示，也就是 $y = 2x$
- 密度 19.32g / $cm^3$ 的金塊，在 $xcm^3$ 時的重量若為 yg，也就是 $y = 19.32x$



這麼一說，我們確實常用耶！



事實上，當我們說到「每～」、「平均～」這類詞彙時，其中必定有比例關係。當發現這些詞彙時，不妨想一想其中的比例概念。

## ⊕ 比例的通則



理解比例以後，接下來從通則觀點來想想看。



請不要講太難的內容喲……（汗）。



事實上，國中數學後半和高中數學所學的各種函數，可以通則化成「比例：$y = ax$」。



怎麼說呢？



例如學了比例之後，要學的是一次函數「$y = ax + b$」。
這部分我們等一下再確實說明。

> $y = ax$，就是指$y = ax + b$的一次函數，而$b = 0$時成立

就像上面這樣。



原來如此。如果擴大範圍來看，可以說「比例」是特別的狀況對吧？



另外，在國中三年級時，將學習比$y = ax$再更加困難一點的$y = ax^2$的函數問題，稱為「二次的比例」。這部分也是之後再詳細說明。
還有，再更進一步擴大範圍則是在高中數學要學習的
$y = ax^2 + bx + c$的二次函數。
也就是說，**所謂的比例，就是「通向廣大函數世界的入口」**。



範圍真廣闊……。不過，可以說正因為如此，比例是最早學習的函數對吧？

## ⊕「加法運算」也是函數的一種？



嗯……。比例的重要性我應該大致懂了。但函數感覺還是很難耶……（汗）。



沒這回事。

比方說，其實可以**把「加法運算」也視作函數的一種**喔！



什麼！ Masuo老師，您真愛說笑，這絕對不可能（笑）！



這是真的。

$y = x_1 + x_2$的函數就是「加法運算」。



咦？ $y = x_1 + x_2$是函數……？



是的。剛剛說過函數是「x值決定y值的關係」，代入數值的變數只有一個x。

不過，也有像「$y = x_1 + x_2$」這種代入數值的變數有兩個以上的函數。



意思是「$x_1$、$x_2$值決定y值」的關係也是函數？



正是如此。

「代入$x_1$和$x_2$這兩個數值，將產生y值的結果」。



原來代入的數值也不一定只有一個……。



是的。

例如$x_1 = 1$，$x_2 = 2$，

$y = x_1 + x_2$的函數，就是相加的結果$y = 3$。



加法運算也是函數嗎……。

啊！原來如此！

這改變了之前理解算術的角度耶！



像這樣，有多個代入的變數，有時也稱為「多變數函數」。

電子試算表也運用「函數」，輸入的變數有時也有好幾個。



說到電子試算表，我只用過「加總」和「平均」等功能，這的確是函數呢。



其他還有會出現多個計算結果的向量函數，或是代入多個複數的複變函數。



函數的種類還真多呢～！

# 為什麼直角三角形的邊長關係是「$a^2+b^2=c^2$」？

## ⊕ 什麼是畢氏定理？



接著我們來學習畢氏定理。



我記得曾在國中學過畢氏定理！



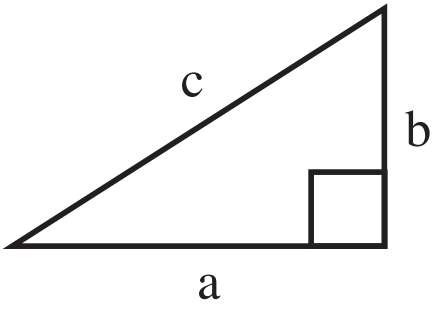
畢氏定理全名是「畢達哥拉斯定理」，屬於非常有名的事實。

**畢氏定理**

直角三角形的直角兩邊長度為a、b，斜邊長為c時，

則$a^2+b^2=c^2$。

**圖15　畢氏定理**




$$a^2+b^2=c^2$$



也就是「斜邊長的平方」等於「其他2邊長平方相加」的意思對吧？



是的。因為這個定理屬於事實，所以能證明。



要怎麼證明呢？



其實畢氏定理有許多證明方式。透過網路查詢，甚至有人把證明畢氏定理的方法統整製作成網站，上面整理出超過100種的證明方法。



哇！超過100種?!
竟然有那麼多……（汗）。



由此可見它是多麼受注目的定理。
當然，這100種當中，也包括「只是中間的計算方式稍微改變」，其實本質相同的證明方法。不過，這麼多證明方法的定理還是很稀奇。



要學習100多種，有點累人……。



那麼，我們在這裡只介紹其中2種。

## ⊕ 畢氏定理的證明1



首先是第一種證明方式。
把邊長a、b、c的直角三角形如圖排列，排出外圍（藍色線）的正方形。

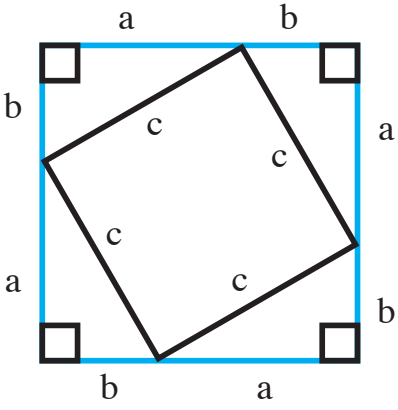


也就是排列四個相同形狀的直角三角形對吧？



是的。
藍色正方形的邊長為a＋b。
而內側形成的黑色四邊形，則是邊長為c的正方形。

**圖16　畢氏定理的證明1－1**






正中央的四邊形確實看起來像正方形耶！



是的。姑且先來證明它是正方形。所謂的正方形就是「四邊的邊長相同」，以及「每一個角都是90°」的四邊形。

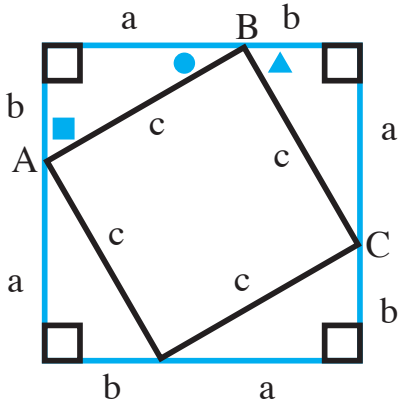


啊！這在上一本書中有證明過！四邊的邊長同樣為c這個我懂，但為什麼會「每一個角都是90°」呢？



請看下一頁的圖。

## 圖17　畢氏定理的證明1－2




例如，∠ ABC＝90°　的理由如下：

- 因為排列的是原本就相同的4個直角三角形，所以▲＝■
- 三角形的內角和為180°，所以■＋●＝90°

從以上2個式子，得知▲＋●＝90°

因此，∠ ABC＝180°－（▲＋●）＝90°

其他各角也可依此推論為90°。



原來如此～。這樣就可以了解正中央的四邊形是正方形了。



接下來我們計算一下較大的藍色正方形面積。



我們的目的是證明畢氏定理$a^2 + b^2 = c^2$不是嗎？為什麼要計算面積呢（汗）？



這樣妳會更容易理解之後的說明內容。總之先計算面積吧！



了解。邊長為$a + b$的正方形，求出面積S，應該是下面這一則公式？

$$S = (a + b) \times (a + b) = (a + b)^2$$



沒錯。

另一方面，也可以把較大的正方形分為「正中央的小正方形」及4個三角形來思考。這麼一來，面積計算公式如下：

$$S = c^2 + 4 \times \left(a \times b \times \frac{1}{2}\right)$$
$$= c^2 + 4 \times \frac{1}{2} ab$$
$$= c^2 + 2ab$$



2種方法都能計算出面積S呢！



是的。2個式子都是求出S的結果，我們可以使用等號寫出如下的式子。

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab$$

接著左邊寫成展開式：

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$