

CONTENTS

前言..... 3

【課外活動1】

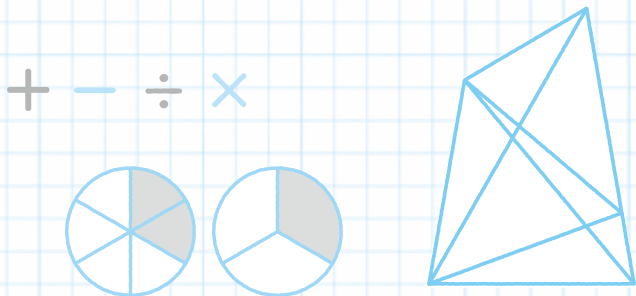
學校不會教的
「超深奧」數學世界..... 14

【課外活動2】

算數（數學）
分為「規則」和「事實」！..... 19

【課外活動3】

數學真正的樂趣
在於探究「事實」！..... 22



第 1 章

其實

未來有可能改變!?

數學的「計算」公式

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

1 【計算的順序】

為什麼×或÷要
比+或-先計算呢？..... 26

2 【質數】

為什麼「1」不是質數？..... 34

3 【倍數的判斷法】

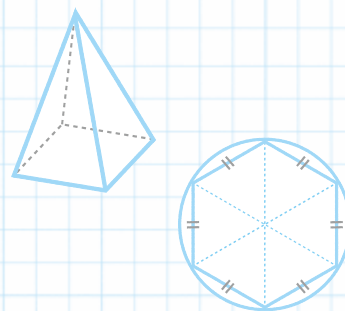
為什麼可以用「位數相加」
判斷是否為3的倍數？..... 39

4 【除法】

為什麼「 $6 \div 2 = 3$ 」？..... 46

5 【0的除法】

其實「 $2 \div 0 = 0$ 」是錯的！..... 54



第 2 章

其實 定義很模糊 !? 「圖形」的公式

6 【分數的加法】
為什麼分母不用變，
只要分子相加就好？ 59

7 【分數的乘法】
為什麼要分母乘分母、
分子乘分子呢？ 67

8 【通分】
為什麼分母和分子
可以同乘一個數？ 72

9 【分數的除法】
為什麼是分母和分子
顛倒過來相乘？ 77

10 【小數的乘法】
為什麼要先當成整數相乘
再點上小數點？ 85

11 【四捨五入】
為什麼 0 ~ 4 要捨去，
5 ~ 9 要進位？ 92

12 【圓的角度】
為什麼圓的角度是 360° ? 100

13 【多邊形的內角和】
為什麼是「 $180 \times (n-2)^\circ$ 」? 104

14 【圖形的全等】
為什麼三邊長都相等的
2 個三角形全等？ 115

15 【等腰三角形】
為什麼 2 個內角會相等？ 120

16 【平行四邊形】
平行四邊形是什麼樣的圖形？ 124

17 【長方形】

長方形、菱形、正方形
分別是指何種四邊形？..... 132

18 【長方形的面積】

為什麼是「長 × 寬」？..... 136

19 【三角形的面積】

為什麼是「底 × 高 ÷ 2」？..... 147

20 【圓周率】

為什麼是「約 3.14」？..... 157

21 【圓面積】

為什麼是「半徑 × 半徑 × 圓周率」？..... 165

22 【圖形的放大】

圖形放大成 2 倍，
面積和體積會變成幾倍？..... 170

23 【錐體的體積】

為什麼三角錐的體積是
「底面積 × 高 ÷ 3」？..... 178

24 【一筆畫圖形】

為什麼「田」這個字
無法一筆畫完？..... 190

第 3 章

「努力能解開的問題」與 「需要才能的問題」



25 【數學學習法】

「擅長數學的人」到底跟常人有何不同？..... 198

26 【連續整數的加法】

快速算出「 $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$ 」的方法..... 205

27 【等差數列的和】

快速算出「 $3 + 7 + 11 + \dots + 39 + 43$ 」..... 208

本書的

登場人物介紹

28 【蘭利問題】

你有發現「這條輔助線」嗎？..... 211

29 【數列的一般項】

「1,1,2,3,5」的下一個數字是？..... 224

30 【用有限的數湊出特定數字】

用4個「4」拼出「0~10」..... 230

結語..... 236

π

+



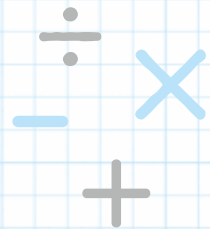
💡 Masuo 老師

每月150萬點閱數的網站「高中數學的美麗物語」管理者。真實身份是東大畢業的超大型企業研究員。國中一年級時靠著自學學會高中範圍數學的數學迷。高中時曾在國際物理奧林匹克墨西哥大賽上得到銀牌。

✍️ 瑪莉



在某公司擔任營業人員的20多歲女性。在自己和別人眼中都是典型文科生，學生時代的數學考試常常滿江紅。因為業績計算總是一蹋糊塗，每天都挨前輩罵，為了擺脫這樣的生活而下定決心學好數學。



$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

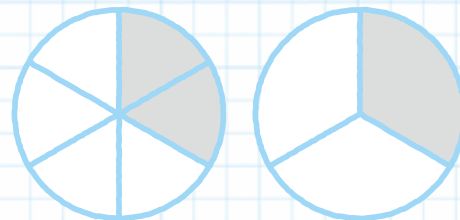
第 1 章

其實

未來有可能改變!?

數學的「計算」公式

$$\frac{a}{b} = a \div b$$



為什麼 \times 或 \div 要比 $+$ 或 $-$ 先計算呢？

小學時令人疑惑的「先乘除後加減」的理由



首先就從妳在小學數學課時最先產生疑惑的「**乘法和除法要比加法和減法先計算**」開始。



剛才也稍微討論過這個話題了。我記得您說這是一個「**數學規則**」對不對？



是的，「**先計算乘法和除法**」是一個「**數學規則**」。下面會舉出幾個我認為為什麼要採用這個規則的原因，但我自己也想不到「任誰都會 100% 信服的理由」。

「由左算到右」會有什麼不同？



舉例來說，讓我們來看看「 $1 + 2 \times 3$ 」這個算式。
按照一般的規則要「先計算乘法」，因此計算的順序如下。

$$1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7$$



的確應該是這樣呢。

但我在小學的時候，因為不明白為什麼一定要先算乘法，所以常常寫成下面這樣，於是就被老師打叉……。

$$\begin{aligned} 1 + 2 \times 3 \\ = 3 \times 3 \\ = 9 \end{aligned}$$



因為規則就是「先計算乘法」，所以妳這樣寫的確是錯的。



可是，到底為什麼不可以這樣計算呢！? 從左邊依序算到右邊，這樣絕對比較好記不是嗎……。



我也不是不能理解妳的感覺。

之所以要這麼規定的其中一個原因，是「先計算乘法和除法，就不用每次都要加上括號，比較方便」。



噢——!?! 只是因為「比較方便」……。那麼用「從左算到右」這個規則不是也可以嗎!?



如果是在大家都有共識的情況下，就算採用這個計算規則，的確也是「可行的」。

舉例來說，假如瑪莉和妳的朋友都已經約定好使用「從左算到右」這個規則，那麼在數學上是沒什麼問題的。



咦——!! 原來是這樣啊……。可是，雖然您說「數學上沒問題」，但實際上用「從左算到右」這個規則，同一個算式算出來的答案會不一樣吧？



沒錯，的確會不一樣。我想用具體的例子來說明會更容易理解，所以讓我們用下面這個問題來思考吧。

問題

請問購買「7罐100元的果汁」和「5個500元的便當」一共需要多少錢？



呢——，果汁是「 $100元 \times 7罐$ 」，便當是「 $500元 \times 5個$ 」，所以答案是……？



依照「先計算乘法和除法」的規則，可以透過以下算式得出答案。

$$100 \times 7 + 500 \times 5 \\ = 3200 \text{ 元}$$

那麼，如果採用「從左算到右」這個規則的話，答案又是如何呢？

瑪莉，請妳用「從左算到右」的規則計算看看同一個式子。



好，我知道了！

$$100 \times 7 + 500 \times 5 \\ = 700 + 500 \times 5 \\ = 1200 \times 5 \\ = 6000 \text{ 元}$$

果然，答案不一樣耶……。



對呀。

使用「從左算到右」的規則的話，就必須像下面這樣把算式拆成兩段才能算出正確答案。

$$100 \times 7 = 700 \text{ 元}$$

$$500 \times 5 = 2500 \text{ 元}$$

$$700 + 2500 = 3200 \text{ 元}$$



原來如此！

這樣子算出來的答案就會是正確的了！



除此之外還有另一個解決方法，那就是**加入「優先計算括號內的算式」這個新規則**，然後把算式整理成下面這樣。

$$(100 \times 7) + (500 \times 5) = 3200 \text{ 元}$$



比起分成3個算式，這樣寫簡單多了呢！



但是，如果用「先計算乘法和除法」的規則的話，就根本不需要加括號，反觀用「從左算到右」規則卻不能沒有括號。



原來如此，這樣我就明白「先計算乘法和除法」就不需要加上括號的意思了。

……可是，只是加個括號而已，應該沒什麼大不了的吧……。



當然，我想應該也有人跟妳一樣認為「加括號這點小事又沒什麼大不了的」。

但是，如果算式變得更加複雜的話，又會如何呢？

譬如剛剛的問題只有「果汁」和「便當」2種物品，如果問題變成有10種物品的話呢？



只有果汁和便當的情況需要2個括號，如果增加到10種的話，代表括號也要跟著增加到10個嗎！？



就是這麼回事。



的確，在這種情況下採用「先計算乘法和除法」的規則就可以省略括號，確實輕鬆不少。但其他計算也是這樣嗎？



譬如，

- 3 枚 50 元硬幣跟 2 張 100 元鈔票一共是多少錢？
→ $50 \times 3 + 100 \times 2$
- 請問 567 按位數拆解是？
→ $5 \times 100 + 6 \times 10 + 7 \times 1$

諸如此類日常生活中常常會用到的計算，如果使用「先計算乘法和除法」的規則，就可以省掉寫括號的工夫。



原來如此。

這樣我就明白「先計算乘法和除法，就不用每次都要加上括號，比較方便」的意思了。



因為「先計算乘法和除法」是一個數學規則，所以無法找到「所有人都能 100% 接受的理由」，但這樣有讓你更能接受一點了嗎？



大概 70% 接受了！



「先計算乘法和除法」只是「數學規則」中的一個例子。在數學的世界，還存在很多雖然不能斷言「非得這樣算不可」，但這樣算會更方便的規則。



沒想到在小學時期讓我困擾了這麼久的「先乘除後加減」，居然只是因為「方便」才定下的規則……。



就是這樣。

「先乘除後加減」只是一個規則，是沒有辦法去證明的。如果把這個規則當成「事實」的話，在數學的世界可以說是錯的。



規則的意思是，未來有一天仍可能迎來「從左算到右的時代」對吧？



的確沒辦法斷言「絕對不可能」。

不過，正如剛剛說過的，「先乘除後加減」是一個非常方便的規則。所以單就這個規則來說，「幾乎」可以說是絕對不會改變的吧。

瑪莉的 memo

- 「先乘除後加減」終究只是規則。之所以這麼規定，單純是因為這樣算比較方便。
- 在數學中，存在很多出於「方便」和「省事」而制定的規則。

【質數】

2

為什麼「1」 不是質數？

「質數」的規則



為了幫妳更深入理解什麼是數學規則，我想再介紹一個例子。
瑪莉，妳還記得質數嗎？



呃——，我記得在學校學過……。
印象中好像是只能被1整除的數……。



八九不離十了。
質數的完整規則如下。

《質數的規則》

所謂的質數，就是大於1，而且正因數只有1和自己的整數。

為防妳忘記什麼是因數，我再稍微補充一下。舉例來說，6是「 2×3 」，所以「2和3是6的因數」。
例如，小於10的質數有「2、3、5、7」這4個數。



我想起來了！
質數也有嚴謹的規則呢。
可是，為什麼還要加上「大於1」這個規定呢？
把1也當成質數不就好了嗎？



這畢竟只是規則，所以的確也有人認為「1應該當成質數」。
不過，大多數的人之所以能接受「質數不包含1」是有「合理理由」的。
這個理由可以用「質因數分解的唯一性」這個數學事實（定理）來簡單解釋。



……唯一性？
聽起來好像很難懂……。



只是字面上難懂，其實內容很簡單喔。

《質因數分解唯一性的數學事實》

2以上的整數，如果不考慮相乘的順序，全都只有1種質因數分解的方法。

譬如「12」這個數可以被分解成「 $2 \times 2 \times 3$ 」這串「只由質數組成的乘積」。



「 4×3 」的話，因為4不是質數，所以不行對吧。



因為4可以繼續分解成「 2×2 」。按照這個思路，「12」的質因數分解就只有「 $2 \times 2 \times 3$ 」一種。

這個命題無視「順序差異」，所以「 $2 \times 3 \times 2$ 」跟「 $2 \times 2 \times 3$ 」視為同一個算式。



那把1算進來的話，又有什麼問題呢？



如果把1也算成質數，那麼在做質因數分解的時候就會變成

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$12 = 1 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$12 = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3$$

可以像這樣拆成好幾種表示法。

換言之，質因數分解的唯一性（只有1種質因數分解方法）就不成立了。



原來如此！

的確，因為1不管相乘幾次也不會變……。



如果要在把1當成質數的前提下來解釋「質因數分解唯一性」，就必須把描述改成「2以上的整數，如果不考慮相乘的順序，且扣除1的個數，全都只有1種質因數分解方法」。



好長好難讀……。還必須額外再補充「扣除1的個數」這句話呢。



一開始就加上「質數不包含1」的規則，解釋起來會方便得多。

「影響大的規則」與「影響小的規則」



所以質數不包含1，也是出於「這樣比較省事」的原因囉……。



但就算把規則改成「質數包含1」，也只是數學事實（定理）的表達方式變得稍微複雜一些，在數學上不會造成什麼大問題。



意思是這個規則並沒有那麼重要，是嗎？



就好像我們的社會中，也存在「為維護社會秩序的重要規則」，以及本身「對社會並不會帶來極大影響的小規則」不是嗎？

在數學的世界也一樣，存在著重要的規則和比較不那麼重要的規則。



原來如此……。

對了，那麼這個規則跟「先乘除後加減」比起來，哪個比較重要呢？



我個人是認為「先乘除後加減」比「質數不包含1」來得更重要。



那是為什麼呢？



因為改變「先乘除後加減」這個規則，會影響比較多數學事實（定理）和算式的表達方式。

不過，當然說不定也會有人認為「質數不包含1」才更加重要。

瑪莉的 memo

- 「質數不包含1」是一個數學規則。
- 就算把1算入質數，也不會在數學上造成巨大矛盾。但是，這麼一來要解釋質因數分解唯一性就變得很麻煩。



【倍數的判斷法】

為什麼可以用「位數相加」判斷是否為3的倍數？



在數學中，存在著絕對成立的「事實」



瑪莉，現在你知道什麼是數學「規則」了嗎？



是，大致有個概念了。



那麼下面就來具體解釋「事實」的部分。

在數學的世界中，除了規則（定義）之外，還有「事實（定理）」的存在。跟規則不一樣，事實是經過學術證明的，所以不可被推翻。

那麼馬上來考考妳，請問「123」是3的倍數嗎？



這個問題的意思是「有沒有一個整數乘以3後等於123」對吧。我想想，3乘以40是120，乘以41是……。



其實對於3的倍數，已經有人證明了以下的「事實」。

《3的倍數的數學事實》

對於所有整數，若各數位的數字和是3的倍數，則該數亦為3的倍數。